# Las ecuaciones de Maxwell

Pedro Gómez-Esteban González

pedro@eltamiz.com

http://eltamiz.com

*"Dale fuego a un hombre y estará caliente un día. Prende fuego a un hombre y estará caliente el resto de su vida".*

*— Terry Pratchett*

# Índice

# 1. Introducción histórica

Lo que vas a leer es un libro dedicado a cuatro de las ecuaciones más bellas e importantes de la Física: *las ecuaciones de Maxwell*, llamadas así en honor a James Clerk Maxwell, de quien hablaremos más en detalle en un momento. Es una monografía pensada para quienes han visto estas ecuaciones o han oído mencionarlas como un ejemplo de elegancia o belleza, pero no las han estudiado en la Universidad. Mi intención es que, si estás en ese caso, salgas de aquí al menos sabiendo qué significa conceptualmente cada una de las cuatro ecuaciones, qué consecuencias tienen y cómo describen el mundo que vemos a nuestro alrededor.

Además, intentaré resarcir a quienes –como yo mismo– estudiaron las ecuaciones pero sin que se les explicase antes, cualitativamente, qué demonios significa cada una antes de ponerse a hacer problemas con ellas y a calcular rotacionales y otras pamplinas como un mono de feria. Estoy seguro de que hay gente que las explica como debe, pero también hay quien no lo hace, de modo que si esto sirve para que quienes estudien estas cosas en la carrera tengan un salvavidas si se encuentran perdidos al principio, mejor que mejor.

La estructura de este librito es la siguiente: en primer lugar veremos una pequeña introducción histórica a las ecuaciones para situar a cada personaje relevante en su lugar. Después dedicaremos un capítulo a cada una de las cuatro ecuaciones, y terminaremos con otros tres capítulos en los que exploraremos asuntos relacionados con ellas sin los que, tal vez, no sea posible comprender su profundidad y relevancia.

A pesar de que no parto de la base de que conozcas conceptos tan esotéricos como el *rotacional* o la *divergencia*, y de que he intentado explicar las cosas en los términos más sencillos posibles, no te equivoques: entender esto no es fácil. Tal vez no hagan falta conocimientos matemáticos profundos, pero sí te será necesario razonar con cuidado, leer cada capítulo más de una vez y probablemente pelearte con conceptos abstractos hasta someterlos a tu voluntad. ¡Paciencia y vamos con ello!

## ¿Qué son las ecuaciones de Maxwell?

Lo mejor en estos casos es quitarse el miedo, de modo que, sin más aspavientos, aquí las tienes en una de sus formas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ya me imagino que, si eres lego en la materia, te has quedado casi igual que antes, pero quiero dejarlas aquí, al principio, para que posteriormente puedas volver aquí, mirarlas otra vez y –si hemos hecho bien nuestro trabajo tanto tú como yo– que ya no levantes la ceja con indiferencia; que sepas cuál es la personalidad de cada una, en qué se diferencian unas de otras y, en resumidas cuentas, que no sean jeroglíficos sin sentido. Y, si les tomas un poco de cariño, mejor.

Existen, por cierto, muchas otras maneras de escribirlas: las matemáticas son así de versátiles. Dependiendo de para qué vayan a emplearse, las ecuaciones pueden escribirse para estudiar sistemas microscópicos o macroscópicos, pueden incluir «ayudas» que hagan más simple el estudio de sistemas concretos y pueden emplearse unas magnitudes u otras para trabajar, pero independientemente del lenguaje matemático que usemos, *siempre significan básicamente lo mismo* — explicar ese significado es el objetivo de esta monografía.

*¿Qué es lo que dicen en conjunto?* Son la **descripción del campo electromagnético**: el campo eléctrico, el campo magnético, su origen, comportamiento y relación entre ellos, incluyendo las ondas electromagnéticas como la luz. Básicamente, con estas ecuaciones es posible saber cómo va ser y cómo va a comportarse el campo electromagnético en una región determinada a partir de las cosas que hay allí. La contrapartida, es decir, qué le pasa a las cosas que hay allí a partir del campo electromagnético, está descrita por la *fuerza de Lorentz*, de la que hablaremos más adelante. El conjunto de estas ecuaciones describe cosas como la corriente eléctrica, los imanes, los rayos, la electricidad estática, la luz, las microondas, la radio... vamos, son un filón.

Hay un par de cosas más que es conveniente saber sobre estas cuatro ecuaciones. La primera es que, expresadas matemáticamente o en lenguaje común, representan **leyes físicas**. No tienen demostración, sino que juntas constituyen una teoría que ha sido verificada experimentalmente. Dicho de otro modo, si alguien realizase experimentos que nos demuestren que estas ecuaciones son una estupidez, las tiraríamos a la basura y a otra cosa, mariposa. Sin embargo, esto no ha sucedido así ni es probable que suceda: más bien hemos ido comprobando aspectos en los que se acercan a la realidad pero fallan ligeramente, de modo que las hemos ido modificando para tener en cuenta cosas como la cuántica o la relatividad. Eso sí, el espíritu y el significado último siguen siendo básicamente los mismos.

El segundo detalle a tener en cuenta es que, como veremos en el siguiente epígrafe, las ecuaciones originales no eran cuatro y **las que usamos hoy en día no son exactamente las mismas** que propuso James Clerk Maxwell. El bueno

de James utilizó algunas otras magnitudes diferentes, y unas cuantas ecuaciones más, mientras que fue Oliver Heaviside quien hizo un pulido, remodelación y lavado de cara que nos proporcionó lo que ves arriba y sus otros equivalentes matemáticos.

Es más, de las cuatro ecuaciones de arriba, la única en la que Maxwell hizo una contribución concreta y novedosa es la última, de modo que cada una de las cuatro ecuaciones llevan el nombre de otro científico –quien propuso cada una–, con el propio Maxwell compartiendo honor en esa última. Puede que al leer esto hagas una mueca de desdén a este escocés genial, pero creo que sería una equivocación: a menudo, el genio está en sintetizar, no en crear. Como veremos en un momento, muchos científicos habían ido descubriendo pinceladas del comportamiento eléctrico y magnético de las cosas, pero eran eso, retazos. Hacía falta un auténtico genio para relacionar unas ideas con otras y mirar las cosas como un todo, y ese genio fue Maxwell. Pero veamos, brevemente, cómo sucedió todo.

## Contexto histórico

No voy a hablar aquí de la historia de cada una de las cuatro leyes representadas por las ecuaciones de Maxwell, ya que haré eso en cada capítulo correspondiente, sino más bien del papel del propio Maxwell, dónde y cuándo aparecieron sus leyes y qué transformaciones posteriores sufrieron para tomar la forma con las que las conocemos ahora. Sé que esto puede parecerte un rollo y que quieres entrar en materia, pero creo que hacerlo así es, en última instancia, más provecho-

so, y significará que recordarás mucho mejor lo que aprendas después.

Antes de que Maxwell entrara en escena ya conocíamos muchas piezas del rompecabezas que él completaría; esas piezas habían sido obtenidas, a lo largo de los siglos, por otros genios que irán apareciendo en este libro: Coulomb, Faraday, Ampère, Ørsted...

Sabíamos que existía algo denominado *carga eléctrica*, que había dos tipos y que ambos sufrían una fuerza de atracción o repulsión con cargas eléctricas del mismo tipo o del contrario. Sabíamos que esa carga eléctrica –a veces llamado *fluido eléctrico* porque se desconocía el hecho de que estaba cuantizada, ni sabíamos aún de la existencia de protones o electrones–, al moverse por el espacio, generaba corrientes eléctricas que era posible crear y mantener en el tiempo. La electricidad era, cuando llegó Maxwell, un viejo conocido.

Conocíamos también materiales, como la *magnetita*, que formaban imanes naturales que, como las cargas, podían atraerse o repelerse. Sin embargo, la fuerza que sufrían y ejercían las cargas *no era la misma* que sufrían y ejercían los imanes. Como la electricidad, el magnetismo era un viejo conocido de la humanidad mucho antes de que Maxwell hiciese su aparición.



*Sobre hombros de gigantes: Ampère, Coulomb, Gauss, Ørsted, Faraday.*

Sin embargo, nos faltaban cosas; para empezar, nos faltaba darnos cuenta del pedazo de rompecabezas que teníamos delante de los morros. Porque, como pasa tantas veces, algunos pensaban que ya entendíamos muy bien tanto electricidad como magnetismo –cada uno por su lado– y que no había más que pulir detalles. Sin embargo, se nos quedaron los ojos como platos cuando en 1820 el danés Hans Christian Ørsted se dio cuenta de que **una corriente** *eléctrica* **creaba a su alrededor un campo** *magnético*. Estaba claro que lo que antes creíamos que eran cosas independientes –electricidad y magnetismo– no lo eran tanto. Al menos, tras Ørsted, teníamos claro que no lo teníamos nada claro, lo cual es un progreso.

Otro enigma de la época era la luz: qué era realmente, cómo se propagaba, qué la generaba exactamente... pero claro, nadie pensaba que este problema tuviera nada que ver con el otro. Eran, como digo, piezas de un puzzle que ni siquiera sabíamos que existía como tal.

De hecho, se ve aquí en cierto sentido el avance de una ciencia incipiente: en un principio se *descubren* fenómenos. Luego se *describen* esos fenómenos y se comprueba en varios lugares que existen y cómo suceden exactamente. Posteriormente se pasa a *clasificar* esos fenómenos y crear un voca-

bulario con el que referirse a ellos con cierta precisión y, si se trata de una «ciencia exacta», finalmente se pasa a *cuantificar* esos fenómenos con ecuaciones. Además, con ecuaciones o no, llegada la madurez de la ciencia hace falta una descripción que englobe conjuntos de fenómenos y los sintetice para crear, por fin, una *teoría*.

Pero a mediados del XIX estábamos muy lejos de algo así para el electromagnetismo. ¿O no?

## James Clerk Maxwell

En 1831 nació en Edimburgo nuestro héroe: el pequeño James, hijo de John Clerk y Frances Cay. La razón de que no veas ningún «Maxwell» por ahí es que no lo había. El padre era familia de los Maxwell, pares del Reino, y poco después del nacimiento de James la familia se trasladó a una propiedad heredada de los susodichos Maxwell. Como consecuencia, John Clerk tomó el nombre de John Clerk-Maxwell, y su hijo pasó de ser James Clerk a James Clerk-Maxwell; posteriormente desaparecería el guión de apellido compuesto, no sé por qué, y James firmaría como James Clerk Maxwell, que es como lo conocemos hoy. Injustamente, hablamos de Maxwell y las ecuaciones de Maxwell, como si Clerk fuera parte del nombre y no el apellido (y desde luego, yo seguiré llamándolo como se hace normalmente).

El caso es que el pequeño James, desde muy pronto, demostró que tenía una inteligencia fuera de lo común. El pobre lo pasó mal en el colegio, porque los primeros diez años de su vida no fue a la escuela, y hasta ese momento fue educa-

do por profesores particulares –el padre no era precisamente pobre– en la casa de campo heredada de los Maxwell. Como consecuencia, el paso de esa infancia arropada en casa a un colegio fue algo traumática: muchos de sus compañeros se reían de él, porque no estaba «curtido» socialmente, venía del campo y además me imagino que era más bien rarito. Afortunadamente para él, encontró un par de amigos que lo serían durante toda la vida, Peter Guthrie Tait y Lewis Campbell, y los tres sobrevivieron al colegio sin más problemas.

James era un auténtico genio. No digo esto por decir: a los catorce años se despertó en él el interés por las curvas cónicas –elipses, parábolas y demás–, y publicó un artículo, *Oval Curves*, en el que examinaba este tipo de curvas de dos focos, las propiedades de curvas con más de dos focos y cómo dibujarlas. Alguien antes que él había atacado el problema de las curvas con más de dos focos y tal vez te suene su nombre, René Descartes, pero James no conocía el trabajo del francés y su método era más simple y elegante que el de Descartes. *¡Con catorce años, por el amor de Dios!*

El padre de Maxwell se quedó tan patidifuso al leer el artículo de James que se lo envió a un profesor de la Universidad de Edimburgo, James Forbes, para ver qué pensaba. La reacción de Forbes fue inmediata y bastante clara: lo leyó en nombre del niño en una reunión de la Royal Society de la ciudad (el propio James no tenía la edad suficiente para ser admitido como ponente en la reunión). El artículo de este adolescente fue publicado en 1846. Este episodio fue decisivo en la vida de James por dos razones: por un lado, su padre tenía la intención de que James se dedicara a la abogacía como él mismo, pero claro, ante algo así, *¿cómo le dices al chaval que no se dedique a las ciencias puras si le gustan?* Por otro lado, For-

bes quedó profundamente impresionado ante la inteligencia del joven Clerk-Maxwell, y se convertiría en su mentor en la Universidad y más allá de esa época.



*Los mentores tétricos también merecen gratitud.*
*James David Forbes (1809-1868).*

De hecho, con dieciséis años James fue admitido en la Universidad de Edimburgo y permanecería allí tres años antes de ir a Cambridge. En Edimburgo, Maxwell estudió Matemáticas y Filosofía Natural –entre otros, bajo el propio James Forbes–, a la vez que realizaba diversos experimentos en casa, sobre todo de óptica, y escribía algunos artículos más de Matemáticas y Física. A los 18 años se leyeron otros dos artículos suyos más en la Royal Society de Edimburgo — pero no los leyó él, claro, ¡no vamos a admitir a cualquier zagal en las reuniones! En fin.

Tras tres años en Edimburgo, se trasladó a la Universidad de Cambridge, donde completaría sus estudios. Durante esa

época, por cierto, publicó otro artículo, éste acerca de experimentos sobre los colores –en la foto de abajo puedes verlo con un disco de colores en la mano–, que no sólo fue leído en la Royal Society de su Edimburgo natal, sino que esta vez se le permitió incluso leerlo a él: ¡qué honor! — y me refiero a la Royal Society, por supuesto. El caso es que tras Cambridge, James se presentó a la Cátedra de Filosofía Natural en el Marischal College de la Universidad de Aberdeen, en su Escocia natal –a sugerencia de su mentor, James Forbes– y obtuvo el puesto con veinticinco años, *quince menos que cualquier otro catedrático de su facultad.*



*Un joven James Clerk Maxwell durante su estancia en Trinity College.*

Aunque hoy lo conozcamos fundamentalmente por sus trabajos en óptica, electromagnetismo y termodinámica –y en este librito nos dedicaremos sólo al electromagnetismo–, Maxwell era un genio en casi todo a lo que dedicaba su atención

y, a riesgo de que me des un pescozón por dar tantas vueltas, quiero poner un ejemplo. Desde hacía tiempo se habían observado ya los anillos de Saturno, pero nadie sabía exactamente qué eran. Tal era la curiosidad de la comunidad científica por este enigma que el St. John's College de Cambridge lo planteó como objeto de su Premio Adams en 1857. *¿Quién lograría postular una hipótesis coherente y razonada sobre la naturaleza de los anillos?*

Maxwell se puso manos a la obra y aplicó sus conocimientos de mecánica de sólidos y de fluidos a la tarea. El problema no era fácil, porque se disponía de muy pocos datos experimentales, dada la distancia a Saturno y la limitación de los telescopios de la época: Maxwell tardó dos años en encontrar la solución. En 1859 demostró que los anillos no podían ser fluidos, pues hace mucho tiempo se habrían disgregado, ni podían ser un sólido pues las tensiones estructurales los habrían roto en pedazos. Su sugerencia razonada fue que **probablemente se trataba de muchos pedazos sólidos de pequeño tamaño**, y que la distancia hasta Saturno era la responsable de que nos parecían ser un solo objeto. Su *On the stability of Saturn's rings* (*Sobre la estabilidad de los anillos de Saturno*) obtuvo el Premio Adams en 1859, y un siglo y pico más tarde las sondas Voyager dieron la razón a su hipótesis.

Pero, en lo que a nosotros nos interesa ahora –el electromagnetismo–, todo empezó con la publicación de un artículo en 1855 en Trinity College y con 24 años. Ese artículo, de título *On Faraday's Lines of Force* (*Sobre las líneas de fuerza de Faraday*), explicaba de un modo teórico y matemático las observaciones realizadas por un genio tan grande como el de Maxwell, el del inglés Michael Faraday. Esto es relativamente común: la combinación de un científico teórico y otro experi-

mental para revolucionar la ciencia.

Sin embargo, normalmente suele pasar al revés que aquí: lo típico es que un teórico proponga ideas novedosas, y que un experimentador logre posteriormente demostrar esas ideas. Aquí el orden se invierte, ya que Faraday era un genio experimental como ha habido muy pocos –o tal vez ninguno–, y Maxwell se empapó de las observaciones experimentales de Faraday, además de otros, y consiguió establecer un marco teórico capaz de explicarlas.

Es imposible saber hasta dónde hubiera podido llegar Faraday si hubiera recibido una educación formal: a diferencia de Maxwell, era hijo de un humilde herrero y había entrado en la ciencia como ayudante de laboratorio de Humphry Davy. Sin tener ni idea de álgebra ni cálculo, sus experimentos y conclusiones a partir de ellos revolucionaron la Física. No tengo dudas de que, sin Michael Faraday, Maxwell no hubiera construido el maravilloso edificio que construyó. Para que te hagas una idea, Einstein tenía en la pared de su despacho las fotos de tres científicos: Newton, Maxwell y Faraday.

El caso es que el inglés, tras varios de sus muchísimos experimentos sobre electricidad y magnetismo, había sugerido la existencia de *líneas de fuerza* mediante las cuales un cuerpo podía interaccionar con otro por las fuerzas eléctrica y magnética; para él, estas líneas de fuerza que unían los cuerpos no eran meros conceptos, sino una realidad física, y propuso incluso la posibilidad de que las ondas luminosas fueran una oscilación de esas líneas de fuerza, como las ondas que recorren una cuerda. *¡Qué intuición, qué genialidad, por favor!*

Pero, igual que Maxwell no hubiera sido Maxwell sin Faraday, el escocés hizo florecer las ideas del inglés hasta crear un jardín. En el artículo de 1855, el joven Maxwell construye un aparato teórico incipiente –aún habría que refinarlo– que define muchas de las ideas de Faraday en un conjunto de **veinte ecuaciones**. Allí, Maxwell habla ya de la relación entre el campo magnético y el eléctrico, y cómo cuantificar la influencia del uno sobre el otro.

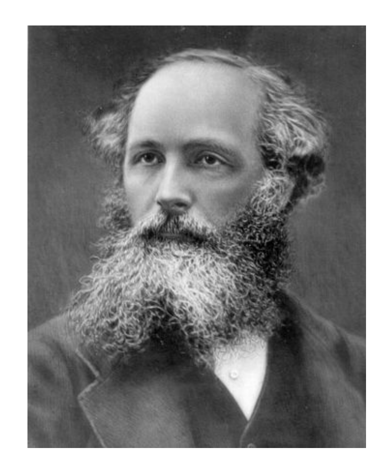
A partir de ahí, posteriores artículos y libros irían puliendo el entramado teórico de Maxwell. Es posible que otro científico con una educación matemática inferior no hubiera podido sintetizar tal cantidad de leyes y observaciones de un modo tan simple y elegante, pero es que Maxwell era un matemático de primera clase. En 1860, debido a una reestructuración, Maxwell perdió su puesto en Marischal; Forbes se había jubilado poco antes, y James se presentó para ocupar su plaza en Edimburgo, pero la consiguió su amigo Tait en vez de él. Finalmente terminó en el King's College de Londres, donde permanecería cinco productivos años.

Durante su estancia en Londres, Maxwell convierte su artículo inicial en una auténtica **teoría del electromagnetismo y la luz**. Recuerda que la óptica era uno de los intereses del escocés, y de hecho en 1860 obtuvo la Medalla Rumford de la Royal Society por su trabajo en este campo — en 1861 se convertiría además en miembro de la Sociedad. Durante esta época conoce además a uno de sus héroes, un Michael Faraday ya entrado en años, y asiste a algunas de sus clases: a diferencia del propio Maxwell, Faraday era un profesor excelente y tenía enorme fama como conferenciante.

Entre 1861 y 1862, Maxwell publica *On Physical Lines of*

*Force* (*Sobre las líneas de fuerza físicas*), una nueva versión en cuatro partes de su artículo anterior. Aunque posteriormente elaboraría más las ideas y publicaría más artículos, es aquí donde su genio se muestra verdaderamente al mundo: utiliza el cálculo vectorial para establecer las ecuaciones que rigen los campos eléctrico y magnético de un modo impecable, aunando las leyes y teoremas enunciados antes por Coulomb, Faraday, Gauss o Ampère.

Unos años antes, en 1855, dos alemanes –Rudolf Kohlrausch y Wilhelm Weber–, realizando experimentos con cargas, habían obtenido un resultado peculiar: una magnitud con dimensiones de velocidad que se obtenía al relacionar la carga medida teniendo en cuenta sólo la electrostática o incluyendo los movimientos de cargas. Esta velocidad era bastante parecida a la de la luz –con la precisión que era posible medirla hasta ese momento–. Ni Weber ni Kohlrausch le dieron mayor importancia a este hecho.



*James Clerk Maxwell (1831-1879).*

Sin embargo, cuando Maxwell conoció el resultado de los experimentos de los dos alemanes, se puso a manipular sus propias ecuaciones que describían la electricidad y el magnetismo. *¿Sería posible obtener con ellas la ecuación de una onda?* La mecánica ondulatoria se conocía bien por entonces, y el propio Newton había relacionado la velocidad del sonido con las propiedades mecánicas del medio por el que se propaga. Maxwell hizo algo parecido a lo que había hecho Newton, pero con las «líneas de fuerza» de Faraday en vez de con cuerpos materiales, y obtuvo el valor de la velocidad de esas ondas electromagnéticas: 310 740 000 m/s. La velocidad de la luz. En *On Physical Lines of Force*, el escocés afirma:

> No podemos evitar la conclusión de que la luz consiste en las ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos.

Ese medio era, por supuesto, el *éter luminífero* que tantos quebraderos de cabeza nos daría posteriormente, pero eso es otra historia. La cuestión ahora es el genio de Maxwell para relacionar a Faraday, Weber y Kohlrausch y todo lo demás para explicar la naturaleza electromagnética de la luz, además de otras cosas que veremos ecuación a ecuación.

En palabras de Richard Feynman,

> Desde una perspectiva a largo plazo de la historia del mundo –vista, por ejemplo, dentro de diez mil años–, no puede quedar duda de que el suceso más significativo del siglo XIX será considerado el descubrimiento por parte de Maxwell de las leyes del electromagnetismo. La Guerra Civil estadouni-

> dense palidecerá como algo local e insignificante al compararlo con este suceso científico de primera magnitud de la misma década.

No es una exageración. Aparte de explicar la naturaleza de la luz, las cuatro ecuaciones de Maxwell lo explican, en electromagnetismo, prácticamente todo. Cómo se atraen y repelen las cargas, cómo afecta una corriente eléctrica al espacio a su alrededor, cómo se transmite un campo a través de un medio determinado, cómo una corriente puede afectar a otra a una cierta distancia de ella. Al combinarlas con la ley de Lorentz, constituyen un cuerpo de conocimiento de igual magnitud que los *Principia Matematica* de Isaac Newton.

Además, las implicaciones de las ecuaciones de Maxwell sirvieron a Einstein como inspiración para elaborar su famosísima Teoría de la Relatividad Especial, originando así otra revolución en la Física, aunque de eso hablaremos más adelante.

En 1865, Maxwell se retiraría a su casa familiar –la heredada de los Maxwell–, aunque seguiría escribiendo sobre electromagnetismo. En 1873 publicó *A Treatise on Electricity and Magnetism* (*Tratado sobre electricidad y magnetismo*), una obra en dos volúmenes que desgranaba su teoría. La lectura de estos dos libros impresionó de tal manera a un joven inglés de veintitrés años sin formación académica superior pero muy interesado en el electromagnetismo, Oliver Heaviside, que lo llevó a estudiar matemáticas como un poseso para lograr entender y dominar la obra de Maxwell.



*Oliver Heaviside (1850-1925).*

Heaviside entendía lo suficiente de la obra de Maxwell para comprender su magnitud, pero sus propias lagunas lo desesperaban:

> Era muy ignorante. No tenía conocimientos de análisis matemático (había estudiado únicamente álgebra y trigonometría en el colegio, y se me habían olvidado casi completamente), de modo que mi trabajo estaba claro. Me llevó varios años poder comprender hasta dónde podía llegar.

Heaviside no sólo acabó comprendiendo las veinte ecuaciones con veinte incógnitas de la obra de Maxwell sino que, una vez más, sobre los hombros de gigantes, aprendió el suficiente cálculo vectorial para librarse de prácticamente todas esas incógnitas y reducir, en 1884, la teoría electromagnética

del escocés a sólo **cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas**. Heaviside no descubrió nada nuevo, pero sí interpretó la teoría de Maxwell de un modo que la hizo muchísimo más sencilla de asimilar. Algo así como *«Maxwell es el único Dios, y Heaviside su profeta»*... y no lo digo yo, lo dice el propio Heaviside:

> Debe entenderse que predico el evangelio de acuerdo con mi interpretación de Maxwell.

De modo que, en las próximas páginas, analizaremos la palabra de Maxwell en sus cuatro mandamientos sobre la electricidad, el magnetismo y las relaciones entre ambos, empezando por la *ley de Gauss para el campo eléctrico*.

# 2. Ley de Gauss para el campo eléctrico

Empecemos a desgranar las cuatro ecuaciones de Maxwell, empezando con la primera de ellas, la *ley de Gauss para el campo eléctrico*.

Como hicimos en la introducción, lo mejor es empezar con todas las cartas sobre la mesa, con lo que aquí tienes la ecuación en su *forma diferencial*, algo así como su forma «microscópica» y mi favorita:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pero *¿qué diablos significa esto físicamente?* A eso dedicaremos este capítulo, claro, de modo que cuando termines y mires la ecuación de nuevo, espero que sea con otros ojos.

Antes de nada, el nombre de esta primera ecuación me parece injusto. Se trata de la aplicación de una idea más bá-

sica mediante un teorema descubierto por primera vez por Joseph Louis Lagrange en 1762 y, posteriormente y de forma independiente, por Karl Friedrich Gauss en 1813. De modo que, aunque el mérito del teorema sea de Gauss, el teorema se aplica a algo más profundo y básico, sin lo que esta ley estaría vacía de contenido físico… y, sin embargo, no suele mencionarse aquí el nombre del científico que descubrió esa idea original, Charles-Augustin de Coulomb. La idea básica es precisamente la **ley de Coulomb**.

Esa ley más fundamental, sin la cual no existiría la de Gauss, afirma que *dos cargas eléctricas se atraen o repelen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de ambas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa*. Estoy seguro de que la has leído alguna vez.

A pesar de que la ley de Gauss es más sofisticada que la de Coulomb, y que se aplica a un caso más general que la del francés –estrictamente hablando, la ley de Coulomb sirve para cargas que no se están moviendo unas respecto a otras–, se trata de una evolución de la ley de Coulomb junto con la de Lorentz, y no está de más recordar a Charles-Augustin aquí. Tal vez un nombre más justo sería el de ley de Coulomb-Gauss, pero me parece que a estas alturas no hay nada que hacer.



*Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) y Karl Friedrich Gauss (1777-1855).*

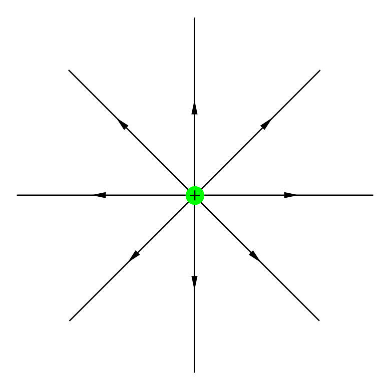
En cualquier caso, desgranemos el lenguaje matemático de la ecuación de arriba para comprender su significado físico.

A la izquierda del igual tenemos $\nabla \cdot \mathbf{E}$, que parece raro si no sabes de estas cosas pero no lo es tanto. **E** es el símbolo para el *campo eléctrico*, una magnitud física que da una idea de la **intensidad de la fuerza eléctrica** (de atracción o repulsión) que sufriría una carga situada en un lugar determinado.

El campo eléctrico es una magnitud vectorial, es decir, es una flecha: su dirección nos dice *hacia dónde* sería empujada una carga eléctrica positiva si la colocásemos en ese punto –una negativa sufriría el tirón en sentido contrario–. Además de dirección, también tiene intensidad (que suele representarse mediante la longitud de la flecha), que nos indica *cuán intensamente* sería empujada esa carga eléctrica. A veces, en

vez de representar el campo eléctrico como flechitas en el espacio, se dibujan las *líneas de campo eléctrico*, en las que en vez de emplear la longitud de la flecha para indicar la intensidad del campo, se utiliza la densidad de líneas — muchas líneas juntas indican un campo muy intenso, y líneas muy separadas uno más débil.

Lo mejor es verlo con un ejemplo. Las líneas de campo eléctrico creadas por un protón son algo así:




Las líneas «nacen» en el protón y «se alejan» de él, lo que significa que una carga positiva –por ejemplo, otro protón– colocada en cualquier sitio se alejaría de nuestro protón, ya que sería repelida por él. Además –y aquí hay algo más de sutileza– si te fijas en esas líneas, *están más cerca unas de otras* al principio pero, según nos alejamos del protón, *divergen unas de otras*. Como dijimos antes, esta representación indica que, cuanto más cerca las líneas, más intenso el campo, y cuanto más alejadas menos intenso: en nuestro dibujo, el campo eléctrico (y con él la fuerza ejercida sobre otra carga) es tanto mayor cuanto más cerca estamos del protón, y tanto

más débil cuanto más lejos. Sin embargo, las líneas nunca «mueren», es decir, no tienen final, sino que siguen hasta el infinito.

Una vez más o menos claro lo que es **E**, vayamos con el misterioso $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Ese símbolo triangular aparentemente esotérico se llama *nabla*, el nombre griego de un arpa hebrea de forma similar al símbolo. Se trata de un operador matemático que puede tomar parte en diversas operaciones vectoriales, y de hecho aparecerá de nuevo en todas las ecuaciones de Maxwell, de modo que espero que cuando terminemos el libro se haya convertido ya en un viejo conocido. Nabla es un operador matemático muy versátil, que puede aplicarse a números normales y corrientes (como la temperatura en distintos puntos de una habitación) o a vectores (como nuestro famoso campo eléctrico), y es capaz de proporcionar información muy interesante sobre ellos.

No vamos a entrar aquí a estudiar en detalle el operador nabla, pero en esta ecuación vemos uno de sus usos típicos: al aplicarlo de este modo a un vector, como el campo eléctrico, $\nabla \cdot \mathbf{E}$ se lee como «*divergencia de E*», y nos proporciona información sobre el vector **E**. Pero *¿qué información?* La divergencia de un campo vectorial cualquiera, como por ejemplo E, nos dice **dónde "nacen" y "mueren" las líneas de campo y cómo de intenso es el proceso de "nacimiento" o "muerte" de líneas**. Podríamos haber hecho lo mismo con un vector diferente que tenga un valor en todas partes pero que no sea el campo eléctrico, como la velocidad del agua en una bañera en cualquier punto del agua. De hecho, si tienes un poco de paciencia, hagamos precisamente eso, ya que el campo eléctrico no lo podemos ver, pero el agua en movimiento sí — haremos algunas trampas, pero creo que será más fácil

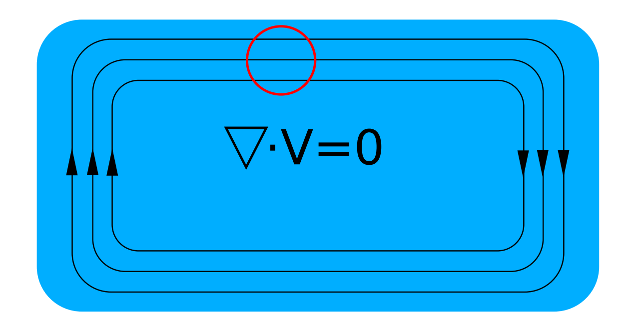
visualizarlo de este modo.

Imagina que tenemos una bañera llena de agua, y que podemos conocer matemáticamente la velocidad de cada gota de agua en la bañera con un vector **V**, con lo que podríamos dibujar *líneas de campo de velocidad*, como hicimos antes con el protón y el campo eléctrico, que nos dijesen gráficamente *hacia dónde se mueve el agua en cada punto de la bañera*, y *cómo de rápido* se mueve (cuanto más juntas las líneas, más rápido).

Al calcular la divergencia de **V**, $\nabla \cdot \mathbf{V}$, como al calcular la de cualquier vector, sólo pueden pasar una de tres cosas:

**1.** Si $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, eso significa que ninguna línea de campo «muere» en el entorno de este punto y ninguna línea de campo «nace». Dicho de otro modo, toda línea que entra en el entorno de este punto sale otra vez de él, y toda línea que sale de aquí entró antes.

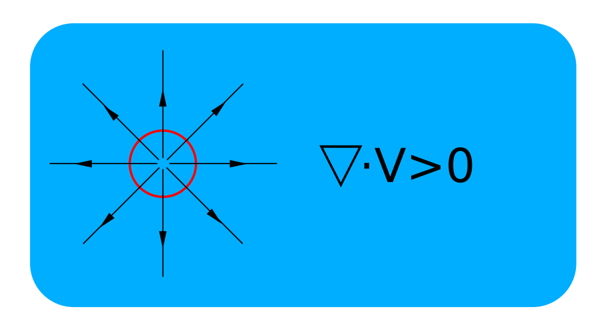
Por ejemplo, fíjate en este dibujo del agua de la bañera y en la pequeña región redondeada:



$\nabla \cdot \mathbf{V}$ en ese punto es, naturalmente, 0, ya que ninguna línea «nace» ni «muere» allí. Dicho en términos del agua, *toda el agua que entra en ese círculo sale otra vez de él, y toda el agua que sale del círculo entró antes en él.* Es más, si has comprendido este primer caso, verás que la divergencia de **V** no es cero sólo dentro del círculo: es cero en cualquier sitio de la bañera. Las líneas no "nacen" ni "mueren" en ninguna parte, luego la divergencia nunca deja de ser nula.

**2.** Si $\nabla \cdot \mathbf{V} > 0$ –si la divergencia es positiva–, eso significa que en el entorno minúsculo alrededor de ese punto nacen líneas de campo. En términos del agua de nuestra bañera, eso significa que del entorno del punto (del círculo) salen más líneas de las que entraron. Cuanto más grande sea el número positivo, más líneas «nacen», es decir, más intenso es el flujo de agua saliendo del círculo.

Claro, en nuestra bañera de arriba, con el agua simplemente dando vueltas, esto no sucedía en ningún sitio. Pero observa este otro caso, en el que tenemos un grifo abierto que añade agua a la bañera en un punto determinado:




Ninguna línea entra en el círculo, pero salen varias: la di-

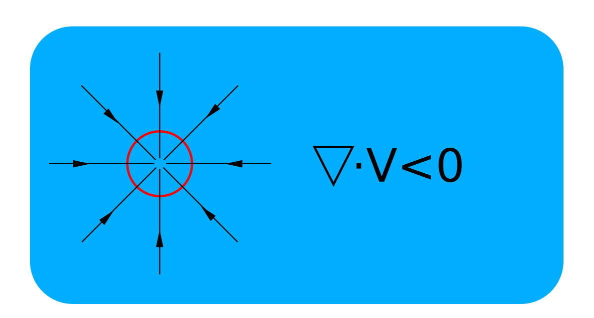
vergencia es positiva. Desde luego, puedes estar arqueando la ceja ante esta trampa: «*¡Un momento!*», dirás. «*Si eso es un grifo mediante el que llenamos la bañera, en el círculo sí que entra agua, a través de la tubería, y luego sale por el otro lado... ¡no está apareciendo agua de la nada!*». Totalmente cierto: como decía antes, hacemos alguna trampichuela. Puedes pensarlo de dos maneras; si estamos estudiando únicamente el espacio que ocupa la bañera, y para nosotros el «universo» es sólo la bañera, entonces el grifo sí es una fuente de agua que antes no estaba ahí.

Otra manera de verlo es ésta: supón que no es un grifo. El agua está inicialmente en reposo (no hay líneas de ningún tipo), y metemos de golpe un bloque de cemento en el centro de la bañera. Como consecuencia, el agua que ha sido desplazada por el bloque de cemento se aleja de donde se encontraba: en la región que ocupa ahora el bloque ha habido una divergencia positiva, ya que no entró agua, pero sí salió agua. De cualquiera de las dos maneras, el concepto es el mismo: divergencia positiva significa que salen más líneas de las que entran. Y, finalmente:

**3.** Si $\nabla \cdot \mathbf{V} < 0$ –si la divergencia es negativa–, eso significa que en el entorno minúsculo alrededor de ese punto mueren líneas de campo. En términos del agua de nuestra bañera, esto significa que en el entorno del punto entran más líneas de las que salen. Una vez más, cuanto más pequeño sea el número negativo, más líneas «mueren», es decir, más intenso es el flujo entrante.

En el caso de la bañera, esto sucedería si ponemos un desagüe por el que desaparece agua, o si quitamos el bloque de cemento de antes y el agua fluye hacia dentro para

rellenar el hueco:




Puedes incluso imaginar un caso compuesto –que no voy a dibujar–: una bañera con un grifo y un desagüe, de modo que en algunos puntos la divergencia sea positiva, en otros negativa y en otros, nula. Lo importante, aunque me repita, es que la divergencia nos indica dónde nacen y mueren –y con qué intensidad– las líneas de campo. De modo que ya sabes, de forma cualitativa, lo que significa la primera mitad de la ecuación de Maxwell de hoy: **$\nabla \cdot \mathbf{E}$ = algo** nos informa de dónde nacen y mueren las líneas del campo eléctrico. Si ese «algo» es positivo, nacerán, si es negativo morirán, y si es cero, no pasará ni una cosa ni la otra, es decir, las líneas atravesarán el entorno del punto saliendo tal cual entraron. Pero ¿qué es ese «algo» a la derecha de la ecuación, ese $\rho/\varepsilon_0$?

Afortunadamente, la respuesta a esta pregunta es bastante más sencilla que la anterior. $\rho$, la letra griega *rho*, representa aquí la **densidad de carga eléctrica**: es una medida de cuánta carga eléctrica positiva o negativa se encuentra en el círculo que rodea nuestro punto. Cuanto mayor sea $\rho$, más carga eléctrica se acumula alrededor del punto (si es positiva, más carga positiva, si es negativa, más carga negativa).

$\varepsilon_0$, la letra griega *epsilon* con el subíndice 0 (el cerito pequeño a la derecha) recibe los nombres equivalentes de **constante eléctrica** o **permitividad eléctrica del vacío**. A mí me gusta mucho más la primera que la segunda, de modo que así me referiré a esta constante aquí.

No voy a entrar aquí a discutir en profundidad el significado físico de ese número: es una constante física, como la de la gravedad o la velocidad de la luz, y su valor en el Sistema Internacional de Unidades es de unos $8,85 \times 10^{-12}\ \mathrm{A}^2\ \mathrm{s}^4\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{m}^{-3}$; aunque el valor es lo de menos ahora mismo, quiero dejarlo aquí para que veas que es un número concreto. La constante eléctrica nos da una medida de la relación numérica entre carga y fuerza eléctrica, pero en lo que a nosotros respecta, lo esencial es comprender que este valor no varía jamás, es una **constante universal**; puedes pensar en ella como en una propiedad del Universo que define su comportamiento.

De modo que, ignorando $\varepsilon_0$, que siempre vale lo mismo, *¿qué factores variables existen en la ecuación?* Dos: la densidad de carga eléctrica y la divergencia del campo eléctrico. Pero ya hemos visto antes que a la divergencia pueden pasarle básicamente tres cosas; *¿qué significa esto en términos de carga y campo?* Repitamos los tres casos anteriores pero mirando nuestra ecuación, que muestro aqui de nuevo para que la tengas delante:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

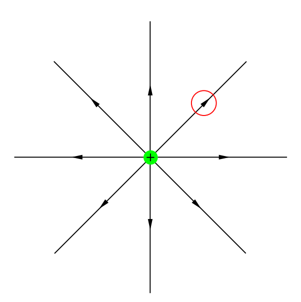
**1.** Si en el punto que estamos mirando **no hay cargas** de

ningún tipo, es decir, $\rho = 0$, entonces la divergencia del campo será cero, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Dicho con otras palabras, si en en el entorno de nuestro punto no hay cargas, todas las líneas de campo que entran salen otra vez como si nada.

**2.** Si en el punto que estamos mirando **hay carga positiva**, es decir, $\rho > 0$, entonces la divergencia será positiva — estarán naciendo líneas de campo. Además, cuanto mayor sea la densidad de carga positiva, mayor será la divergencia y, por lo tanto, más líneas de campo estarán naciendo.

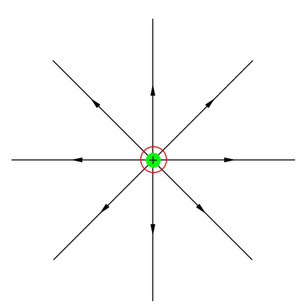
**3.** Si en el punto que estamos mirando **hay carga negativa**, es decir, $\rho < 0$, entonces la divergencia será negativa — estarán muriendo líneas de campo. Además, cuanto mayor sea la densidad de carga negativa, más negativa será la divergencia y, por lo tanto, más líneas de campo estarán muriendo.

Creo que es más fácil comprenderlo con ejemplos visuales, dada la naturaleza «gráfica» de la divergencia, de modo que hagámoslo así. El primer caso es fácil, basta con encerrar en nuestro mini-círculo una región sin cargas eléctricas, como en nuestro primer dibujo:

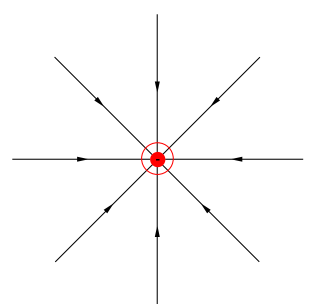



El segundo caso podemos mostrarlo en el mismo diagrama,

ya que tenemos ahí una carga positiva como una catedral, nuestro protón:

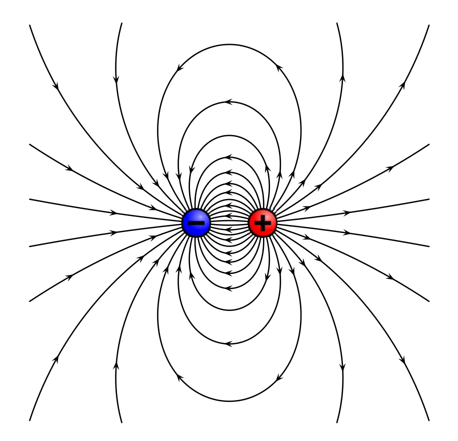


Finalmente, para el tercer caso nos hace falta una carga negativa, por ejemplo, un electrón:



Naturalmente, al manipular la ecuación matemáticamente para obtener las líneas del campo eléctrico, no sólo podemos conocer dónde «nacen» y «mueren», sino cuánto van divergiendo en el espacio, cuántas aparecen y desaparecen, cómo se curvan, etc. De hecho, al aplicarlas a casos concretos se

observa cómo el campo decrece proporcionalmente al cuadrado de la distancia, como decía el buen Charles-Augustin de Coulomb. Por ejemplo, al aplicar la ecuación a un protón y un electrón que estén a cierta distancia uno de otro, aparece algo tan bello como esto:



*Líneas de campo de un dipolo eléctrico (Geek3 [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFPt_dipole_electric_manylines.svg] /Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 License [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en]).*

¡Por fin! Hemos desgranado toda la ecuación, y podemos por lo tanto leerla «en cristiano», y además comentar algunas cosas más sobre ella. *¿Qué dice, por lo tanto, la ley de Gauss para el campo eléctrico o primera ecuación de Maxwell en palabras normales y corrientes?*

Que las cargas eléctricas son los lugares donde nacen y mueren las líneas de campo eléctrico. Las líneas «nacen» en las cargas positivas, y «mueren» en las negativas. Si no hay un tipo de carga o el otro, es también posible que nunca «mue-

ran» en ningún destino, como pasaba con nuestro protón inicial, o que nunca «nazcan» en ningún origen, como en el caso del electrón aislado de antes.

Conceptualmente, la ley de Gauss para el campo eléctrico nos dice cuáles son las **fuentes fundamentales del campo eléctrico**: las cargas. Eso sí, si vuelves a la introducción y miras las ecuaciones de nuevo, verás que nuestro ya viejo amigo, el campo eléctrico **E**, aparece en otros sitios. Sin embargo, esta ecuación puede considerarse el «trono» en el que se sientan el campo eléctrico y la carga eléctrica.

¿Por qué digo esto? Porque es difícil definir rigurosamente qué es la carga eléctrica y qué significa «positivo» y «negativo». Dicho en plata, la carga eléctrica es la propiedad asociada a la *interacción electromagnética*, de la que el campo eléctrico es una de las dos mitades. En la ley de Gauss vemos la relación íntima que existe entre carga y campo — las cargas eléctricas son las fuentes del campo.

La otra pieza del rompecabezas no aparece en la ley de Gauss ni en las ecuaciones de Maxwell; como dijimos en la introducción, el efecto del campo eléctrico sobre las cargas está definido en la ley de Lorentz. Pero esta ley de Gauss para el campo eléctrico nos permite, en cierto modo, definir qué es el campo eléctrico: **es la perturbación creada por la mera existencia de cargas eléctricas**.

Desgraciadamente, parte de la belleza de la ecuación no puedo mostrarla aquí: al aplicarla matemáticamente a un caso concreto, como ves en la figura de arriba, pueden formarse patrones verdaderamente complicados, y me parece maravilloso como tantísima cantidad de información sobre un sis-

tema –todo el entramado de sus líneas de campo eléctrico– puede surgir de una ecuación matemáticamente tan simple.

De modo que te invito, pacientísimo lector, a que vuelvas al principio del capítulo y mires de nuevo esta primera ecuación. *¿Te intimida, o sonríes levemente al mirarla?*

# 3. Ley de Gauss para el campo magnético

La segunda ecuación, a la que nos dedicaremos en este capítulo, es matemáticamente muy similar a la primera, aunque más sencilla. Ejemplifica lo maravilloso de las ecuaciones de Maxwell-Heaviside: la profundidad en el significado con una concisión bellísima, en este caso, de una forma extrema. Como hicimos con la primera ecuación, aquí la tienes en todo su minúsculo esplendor:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Puedes considerarla una especie de prueba: con un mínimo de ayuda, si asimilaste de veras el capítulo anterior, esta ecuación no debería intimidarte lo más mínimo. Eso sí, como digo, algunas de sus consecuencias son interesantes y no tan simples como la propia ecuación, que es una especie de «negativo» de la primera en varios aspectos. Pero, como hicimos con aquella, desgranémosla poco a poco para luego interpre-

tarla como un todo.

Al igual que en la primera ecuación, nos encontramos con el símbolo nabla una vez más (el «arpa hebrea», ¿recuerdas?), pero esta vez está aplicado a una magnitud diferente. Al igual que **E** representa el campo eléctrico, del que hablamos en la primera ecuación, la letra **B** representa el **campo magnético**, parece ser que en honor al científico francés Jean-Baptiste Biot, uno de los pioneros en el estudio de la relación entre electricidad y magnetismo –y cuyo nombre aparecerá de nuevo en este librito, por supuesto–.

De modo que, como puedes ver, esta ley describe el comportamiento del campo magnético a través de su divergencia, $\nabla \cdot \mathbf{B}$, del mismo modo que la anterior hacía lo propio con la divergencia del campo eléctrico, $\nabla \cdot \mathbf{E}$. Como recordarás, la divergencia indica dónde nacen y mueren las líneas de campo: si es nula, no pasa una cosa ni la otra, si es positiva nacen más líneas de las que mueren y si es negativa mueren más de las que nacen. Así, en el caso del campo eléctrico, todo dependía del signo de la carga eléctrica en el lugar que estuviéramos mirando.

Pero ¿qué hay del campo magnético? *¡No hay nada a la derecha del igual!* El significado literal de esta ley de Gauss para el campo magnético, por lo tanto, es clarísimo: **las líneas del campo magnético no nacen ni mueren de manera neta en ninguna parte**. Esto no depende de nada, ni es diferente para cada punto del espacio como sucedía con el eléctrico, sino que es una propiedad ineludible del campo magnético en todo lugar: las líneas de campo magnético no tienen principio ni fin.

Las diferencias entre la primera ecuación y ésta son por tanto, a pesar de la similitud matemática, enormes. Para empezar, la importancia de cada una se debe justo a cosas opuestas: la ley referida al campo eléctrico nos da una especie de «definición positiva» del campo eléctrico a través de la propiedad fundamental que tiene, el hecho de aparecer como consecuencia de la existencia de cargas eléctricas. Como vimos en el capítulo anterior, aplicándola es posible «dibujar» el campo eléctrico creado por las cargas.

Sin embargo, esta segunda ecuación es una especie de «definición negativa» del campo magnético. ¿Qué sabemos de su comportamiento tras leer esta ecuación? Justo *lo que no hace*. Esta ecuación no describe la causa del campo magnético, ni cómo calcularlo en ninguna parte: simplemente sabemos «cómo no es». Desde luego, posteriormente veremos otros principios que sí determinan de forma «positiva» el comportamiento del campo magnético, pero no en este capítulo.

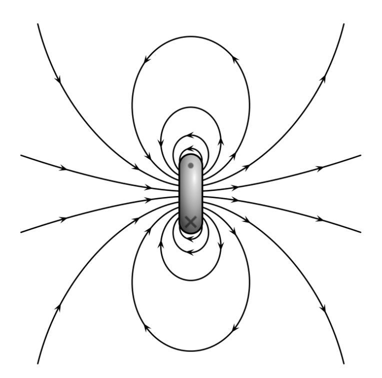
Gráficamente, esta segunda ecuación nos dice algo muy conciso, pero fundamental, sobre las líneas del campo magnético, y que si comprendiste el concepto de divergencia en el capítulo anterior debería sonarte razonable: dado que su divergencia es nula y que, por tanto, el número de líneas que entran en cualquier región es siempre igual al número de líneas que salen, **las líneas de campo magnético son siempre cerradas**. No tienen principio ni fin: si sigues el camino de una de ellas, nunca llegarás a un destino, y si vas hacia atrás para encontrar su comienzo, nunca lo encontrarás. Como digo, es información esencial, pero no es mucho con lo que estudiar este campo.

¿Quiere esto decir que la ley de Gauss para el campo mag-

nético no es interesante? ¡Nada más lejos de la realidad! Exploremos juntos, en primer lugar, su significado más profundo. Aunque nos queden por ver dos ecuaciones, creo que es evidente que esta ley no dice que no exista el campo magnético ni fuentes que lo produzcan — dice algo más sutil, que creo que se comprende mejor contraponiéndolo, una vez más, a la información de la ecuación anterior sobre el campo eléctrico.

La ley de Gauss para el campo eléctrico nos decía que existe *algo* de donde nacen las líneas de campo eléctrico –las cargas positivas– y *algo* donde van a morir esas líneas de campo eléctrico –las cargas negativas–. Podríamos pensar, aunque suene un poco retorcido, que existen dos caras del campo eléctrico: la «positiva» (donde nacen líneas) y la «negativa» (donde mueren líneas), y es posible observar un punto determinado y ver que se produce un fenómeno o el otro.

*Pero no es posible observar sólo una de las dos caras del campo magnético*: sólo es posible ver ambas cosas a la vez. Las fuentes del campo magnético –sean las que sean porque, como digo, esta ecuación nos dice más bien lo que no es el campo magnético, no lo que es– son necesariamente «nacimiento y muerte» de las líneas de campo. Esta ecuación es la razón de que, cuando se dibujan las líneas de campo magnético generadas por cualquier cosa, se muestren siempre figuras como ésta:

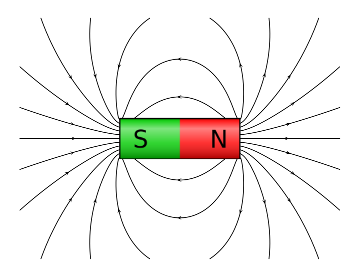


*Crédito: Geek3 [http://en.wikipedia.org/wiki/File:VFPt_dipole_magnetic3.svg] /Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 License [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en]).*

Como ves, todas las líneas son bucles cerrados, unos más pequeños y otros más amplios. Aunque sea un ejemplo absurdo, es como si cualquier producción de campo magnético fuera el lanzamiento de un bumerán: puedes lanzarlo, pero siempre acabará volviendo a ti. Ya sé que esto es absurdo porque las líneas de campo no representan el movimiento de nada: quiero decir que no puede tenerse una cosa sin la otra, a diferencia del campo eléctrico.

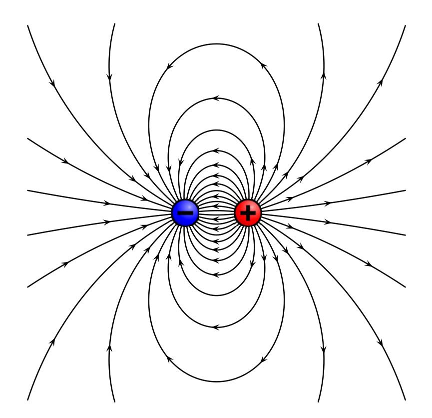
Que las líneas que salen de cualquier región siempre vuelvan a entrar en ella no quiere decir que no sea posible ver diferente comportamiento en las regiones de un cuerpo físico: en algunos puntos, las líneas salen hacia el exterior del cuerpo y en otros entran en él de nuevo. Por eso suele hablarse normalmente de **polos magnéticos**, como sucede en el caso de un imán. Tradicionalmente se llama polo norte al lugar por donde las líneas salen desde el interior del cuerpo hacia fuera y polo sur a la región por la que las líneas entran desde el

exterior hacia dentro del cuerpo (observa que en este dibujo se han ocultado las líneas en el interior del cuerpo pero están ahí, aunque no se dibujen, y son cerradas):




*Crédito: Geek3 [http://en.wikipedia.org/wiki/File:VFPt_cylindrical_magnet_thumb.svg] /Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 License [http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en]).*

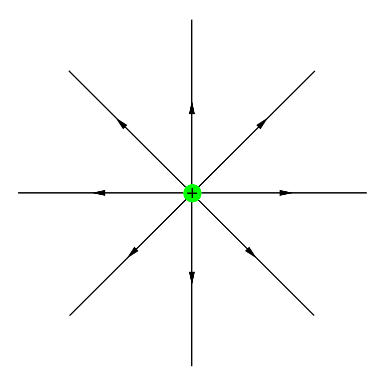
Si te fijas en este imán, las líneas de **B** se parecen muchísimo a las líneas de **E** del capítulo anterior cuando mostramos una carga positiva y una negativa cerca una de otra:



*Crédito: Geek3*
*[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFPt_dipole_electric_manylines.svg]*
*/Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 License*
*[http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.en]).*

En el caso del campo eléctrico, la carga positiva se llama a veces *polo positivo* y la negativa *polo negativo*, como en el magnético (aunque sin «norte» y «sur»), y un conjunto de dos cargas como el que ves aquí se denomina *dipolo eléctrico*, lo mismo que el dibujo de arriba representa un *dipolo magnético*. El polo positivo en el eléctrico se parece al polo norte, y el negativo al sur. Todo se parece mucho… **pero hay una diferencia tremenda** entre ambos casos, no en lo que ves ahora, sino en lo que puede conseguirse a partir de cada uno de los dos dipolos.

En el caso del dipolo eléctrico, no tenemos más que llevarnos una de las dos cargas del dipolo y dejar la otra, y en vez de un dipolo tenemos algo como lo que veíamos en el capítulo anterior, de modo que las líneas tengan nacimiento pero no fin, o al revés. Nos hemos quedado con «la mitad del dipolo eléctrico»:



Pero, en el caso del dipolo magnético, *¿cómo hacemos lo mismo?* La respuesta, por supuesto, es que **no podemos**. Hagamos lo que hagamos, la divergencia del campo magnético siempre es cero, luego nunca jamás podremos conseguir que sus líneas no sean cerradas. Si cortásemos el imán por la mitad, por ejemplo, para intentar quedarnos con el polo norte en una mano y el polo sur en la otra, veríamos que *cada uno de los dos pedazos es su propio «imancito» con su polo norte y su polo sur*.

Dicho de un modo pedante, estas dos ecuaciones significan lo siguiente: existen dipolos eléctricos y dipolos magnéticos. Al quedarnos con «la mitad» de un dipolo eléctrico tenemos un *monopolo eléctrico*, es decir, una *carga eléctrica*, **pero no existen los monopolos magnéticos**. La existencia de una carga positiva no exige la de una carga negativa, pero la existencia de un polo norte sí exige la de un polo sur. *¡La divergencia es nula!*

Podemos incluso expresar esto de un modo más pedante todavía: una carga eléctrica no es más que un monopolo eléctrico, pero dado que no hay monopolos magnéticos, las ecua-

ciones de Maxwell afirman que **no existe la carga magnética**. Fíjate en que, una vez más, no digo cuál es la fuente del campo magnético sino cuál *no lo es*, así es la naturaleza de este segundo principio.

Sin embargo, no podemos olvidar algo fundamental que mencionamos en la introducción: las ecuaciones de Maxwell son la representación matemática de principios físicos, no verdades absolutas. Es perfectamente posible que sí existan los monopolos magnéticos –es decir, la carga magnética– y que simplemente no hayamos sido capaces de detectarla aún. El detector *MoEDAL* (*Monopole and Exotics Detector At the LHC*, *Detector de monopolos y partículas exóticas en el LHC*), en proceso de construcción –algunos detectores ya están instalados– tratará de hacer exactamente eso: detectar la presencia de monopolos magnéticos, si es que los hay.

Si los monopolos magnéticos existen, debemos introducir un nuevo término en esta ecuación de Maxwell, puesto que como hemos dicho antes, la existencia de monopolos es equivalente a la de la carga. De ser así, además de carga eléctrica existiría la *carga magnética*, y la divergencia de B no tendría por qué ser cero siempre. Al igual que en el caso del campo eléctrico, podríamos tener puntos en los que fuera positiva (si hay cargas magnéticas positivas), otros en los que fuera negativa (si las hay negativas) y otros en los que siguiera siendo nula. Esta segunda ecuación se parecería, por tanto, muchísimo a la primera (pongo ambas juntas para comparar):

$$\mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad\qquad \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$$

Como ves, en el caso de la ley de Gauss para el campo magnético la constante es diferente que en la del campo eléctrico, pero es una cuestión de unidades –y hablaremos de la constante más adelante, porque no es importante ahora mismo–. He representado la densidad de carga magnética como la eléctrica, con la letra *rho*, pero con un subíndice *m* para diferenciarla de la carga eléctrica. Las ecuaciones son más simétricas que las actuales, y a algunos físicos les parece que tanta simetría y belleza es sospechosa — pero a veces los seres humanos tendemos a buscar simetrías donde no tiene por qué haberlas, con lo que esto no demuestra nada.

Puede parecer una tontería inventar una forma de la ecuación que incluye cosas que no hemos visto, pero no lo es tanto: no es posible detectar cargas directamente, sino su influencia sobre lo que las rodea, es decir, sus campos eléctrico y magnético. Puesto que el campo magnético en un lugar determinado es la suma del efecto de cargas eléctricas y, si existen, de cargas magnéticas, **necesitamos predecir el efecto de las cargas magnéticas sobre el campo para poder encontrarlas si existen**: si ese efecto se mide como predice la ecuación «modificada», es que los monopolos magnéticos existen, y viceversa. Aunque también es posible, como siempre, que la modificación no sea tan leve y haya algo mucho más gordo que no estemos viendo, así es la ciencia.

Pero, olvidando por un momento la posible existencia de monopolos magnéticos –que son una simple hipótesis–, vuelve al principio del capítulo y lee la ecuación de nuevo. ¿No es algo claro y meridiano? *¡Las líneas del campo magnético son siempre cerradas, por supuesto, luego su divergencia es siempre nula!* Y decían que la ecuaciones de Maxwell eran complicadas...

# 4. Ley de Faraday

No voy a repetir de nuevo lo que afirmaban las dos ecuaciones anteriores como principios físicos, pero sí quiero poner de manifiesto lo que tenían en común. A veces las ecuaciones de Maxwell se nos embrollan en la cabeza, y es más fácil recordar lo que significan agrupándolas dependiendo de qué cosas las diferencian o las asemejan. Y, como veremos en un momento, es muy fácil dividir las cuatro en dos parejas –las dos que hemos visto hasta ahora y las dos que nos quedan por ver–.

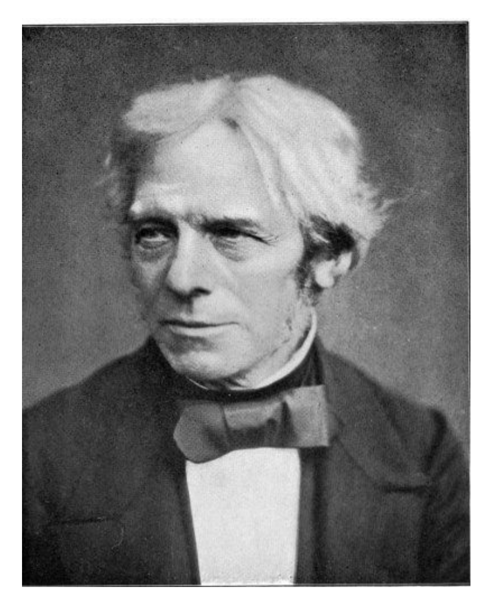
Las dos leyes de Gauss que hemos visto definían características del campo eléctrico y el campo magnético de manera independiente. En ningún caso se mezclaban ambos — los propios nombres así lo reflejan. Si sólo existiesen estos dos principios físicos, *el campo eléctrico y el magnético serían conceptos completamente independientes*; sin embargo, no lo son en absoluto, como empezaremos a ver aquí. Ahí está la gran diferencia entre las dos ecuaciones que veremos y las dos que hemos visto ya: en las dos que nos quedan **se mezclan ambos campos**.

Esto las hace más complejas que las dos primeras, pero también más interesantes. Es en estas dos ecuaciones donde el genio de Maxwell se muestra en todo su esplendor, como

veremos en este capítulo y el siguiente. Pero lo primero, como siempre, es escribir la ecuación que estudiaremos, la **ley de Faraday**, a veces llamada *ley de inducción de Faraday* o *ecuación de Maxwell-Faraday* –en un momento veremos por qué incluir a James aquí–. Al igual que en capítulos anteriores, la iremos despiezando y espero que, al final, la mires como a una vieja amiga:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Eso sí, antes de desgranarla, quiero hablar sobre su origen experimental, al que debe su nombre. Como recordarás de la introducción, Maxwell desarrolló sus ecuaciones formalizando principios físicos que habían sido, en su mayor parte, establecidos por otros científicos. Ya dijimos entonces que sin el genio de Michael Faraday probablemente no hubiéramos disfrutado del de Maxwell, al menos en toda su extensión. No en vano Faraday era uno de los héroes del joven James Clerk Maxwell a pesar de la falta de preparación formal del primero.



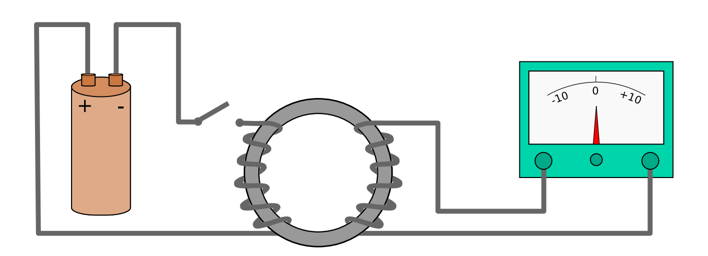
*Michael Faraday (1791-1867).*

Porque, aunque no fuera un matemático experto, Faraday era un experimentador de primera, y su intuición física era fenomenal. Aunque no fue él el primero en darse cuenta de la relación entre electricidad y magnetismo –fue Hans Christian Ørsted en 1821, y de eso hablaremos en el próximo capítulo–, sus experimentos en electromagnetismo fueron de tal calidad que nos proporcionaron una enorme cantidad de conocimiento sobre el problema. Además, a pesar de sus lagunas matemáticas, Faraday expresó las conclusiones de sus experimentos con tal lucidez que permitió a Maxwell –que sí era genial en matemáticas– enunciar los principios subyacentes de un modo muy eficaz.

En lo que nos ocupa ahora, tras los descubrimientos de Ørsted y otros, muchos científicos se dedicaron a realizar ex-

perimentos que conectasen electricidad y magnetismo, Faraday incluido. Ørsted había demostrado que una corriente eléctrica producía a su alrededor un campo magnético, pero *¿era posible lo contrario? ¿Podía un campo magnético producir fenómenos eléctricos?* La respuesta la dieron, de manera independiente y casi a la vez, el estadounidense Joseph Henry y el británico Michael Faraday — pero Faraday publicó sus resultados antes, y de ahí el nombre de esta ecuación.

En uno de sus experimentos, en 1831, Faraday enrolló un cable conectado a una pila alrededor de un anillo de hierro. Gracias a Ørsted y la cuarta ecuación, de la que hablaremos en el siguiente capítulo, se conocía ya el hecho de que la corriente eléctrica del cable generaba un campo magnético, de modo que el anillo de hierro se convertía en un imán. Hasta aquí, todo conocido; sin embargo, el inglés enrolló un segundo cable en el otro lado del anillo, un cable *sin pila*. La idea era simple: si una corriente eléctrica generaba un campo magnético, tal vez un campo magnético generaría una corriente eléctrica.




*Experimento de Faraday.*

De modo que Faraday puso un detector en el segundo cable, el que no tenía pila alguna, y encendió el primer circuito

conectado a la pila. Sin embargo, no sucedió lo que podría parecer evidente: cuando la pila estaba encendida y por tanto había un campo magnético, el segundo cable no mostraba corriente alguna. *La situación era exactamente igual con la pila encendida que con la pila apagada.* Pero, ¡ah!, algo inesperado sí sucedía: justo en el momento de encender el primer circuito o apagarlo, aparecía una corriente eléctrica en el segundo circuito.

Lo extraño era que no era la existencia de un campo magnético lo que inducía una corriente en el circuito sin pila: **era la variación del campo magnético la que generaba corriente**. Además, y esto era también curioso, cuando se encendía el circuito, la corriente en el segundo circuito iba en un sentido, pero al apagarlo, la corriente iba en sentido contrario. En ambos casos se detectaba corriente durante un tiempo muy corto: el que duraba la transición apagado-encendido y viceversa. Eran los cambios, y no la mera existencia de campo magnético, los que causaban la aparición de corriente.

De modo que Michael Faraday enunció un principio que hablaba exclusivamente de cables y circuitos, y el ruso Heinrich Lenz lo refinó añadiendo el sentido de la corriente. Ese principio sigue utilizándose hoy, sin apenas cambios, pero Maxwell fue capaz de extrapolarlo como una ley ajena a circuitos y corrientes, una ley matemática que servía para casos diferentes y que, como veremos en el futuro, tiene consecuencias que Faraday imaginó pero nunca pudo demostrar. La ecuación de hoy lleva, por tanto, el nombre de Faraday, ya que es la expresión matemática del principio descubierto por el inglés: *la influencia de un campo magnético cambiante sobre la electricidad*, pero la forma que utilizamos es más abstracta que la enunciada por el bueno de Michael.

La versión de Maxwell-Heaviside (porque fue el segundo quien escribió la forma moderna de la ecuación) es, como las otras, bellísima por lo conciso de su expresión y lo profundo de sus consecuencias. Una vez más, una especie de *haiku* físico, que repito aquí para empezar a masticarlo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

De modo que, como en ocasiones anteriores, respiremos profundo y ataquemos las matemáticas del asunto.

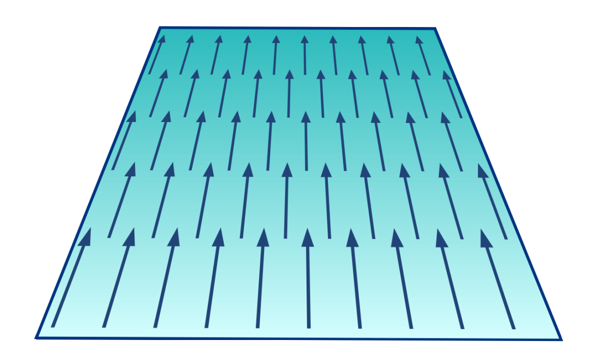
Aunque una vez más, como puedes ver, aparece nuestro viejo conocido, el operador *nabla*, en este caso no se trata de la divergencia, sino de algo diferente. Puedes verlo porque en el caso de la divergencia teníamos $\nabla \cdot \mathbf{E}$, mientras que ahora tenemos $\nabla \times \mathbf{E}$. Se trata de cosas matemáticamente distintas pero, en lo que a nosotros importa ahora mismo, la diferencia es que el primer caso indicaba la *divergencia* del campo, mientras que el segundo (con la equis) se indica una operación distinta de la divergencia, el **rotacional** del campo.

El concepto de rotacional es similar al de divergencia en el sentido de que proporciona información acerca del campo vectorial, pero se trata de una información diferente y algo más difícil de visualizar. Como hicimos con la divergencia, hagámoslo con un campo vectorial más cercano a los sentidos que el eléctrico: el flujo de agua en una bañera. Como recordarás, en ese contexto la divergencia nos decía dónde había «grifos» de agua y dónde «desagües», es decir, *de dónde salía y por dónde escapaba* el agua de la región que estábamos

estudiando.

Si llamamos, como hicimos entonces, **V** a la velocidad del agua en cada punto, $\nabla \times \mathbf{V}$ nos proporciona una nueva información, que intentaré describir primero en una frase para luego ver ejemplos, que es como mejor se ven las cosas. Dicho fatal, $\nabla \times \mathbf{V}$ nos da una idea de la *turbulencia* del agua en ese punto; dicho un poco menos mal, indica **hacia dónde y cómo de rápido giraría una pelota** sumergida en ese punto de la bañera.

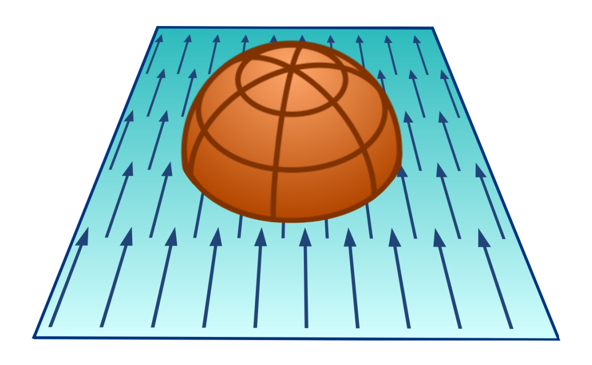
Para ir asimilando el concepto, veamos el caso más sencillo posible: imaginemos el flujo de agua más regular y suave posible. Supongamos que en cierta parte de la bañera toda el agua se mueve a la vez, a la misma velocidad y en la misma dirección:



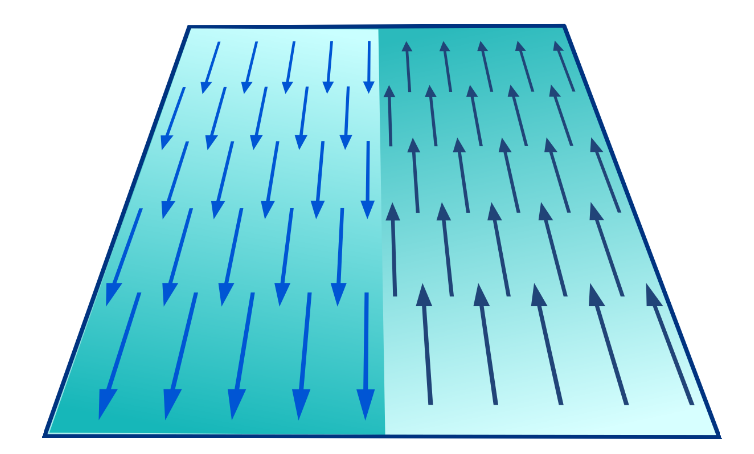
Si ponemos una pelota microscópica en cualquier punto del agua, *¿se pondrá a girar la pelota?* Y, si gira, *¿hacia dónde lo hará y cómo de rápido?* **Eso es lo que significa el rotacional** en esta analogía (de hecho, *rotacional* viene de rotación y no por casualidad). De modo que pensemos juntos, y tratemos

de responder a esas preguntas. Desde luego, hace falta cierta imaginación para visualizar la pelotita en el agua, pero creo que es posible hacerlo y llegar a conclusiones razonables sin problemas.

Creo que resulta claro que, en el dibujo de arriba, **la pelota no rota**. Desde luego, será empujada por el agua y se irá con la corriente, pero no girará sobre sí misma. Por lo tanto, no hace falta que respondamos a la segunda pregunta, y la conclusión respecto al rotacional es clara: en la figura de arriba, excepto en los bordes (luego hablamos de bordes), $\mathbf{\nabla} \times \mathbf{V} = 0$:

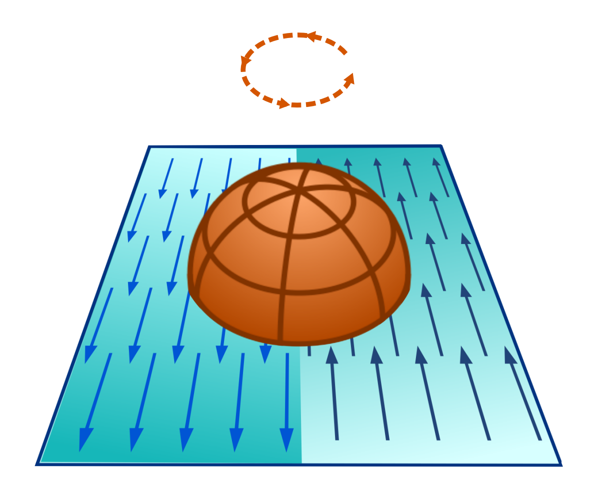


Pero veamos un segundo ejemplo algo más complejo. Supongamos que en un momento determinado hemos hecho que el agua se mueva en sentidos contrarios en las dos mitades de la bañera, por ejemplo así (se representa cada mitad en un tono para ayudar a ver la frontera entre las dos regiones, el agua en sí es igual):

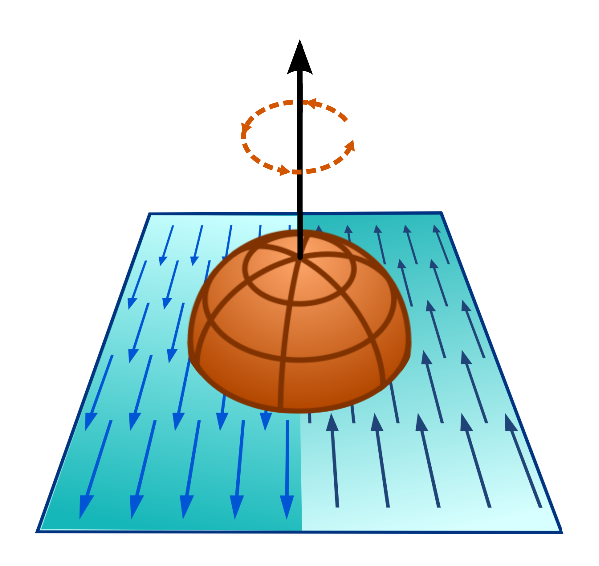


Si ponemos la pelota en cualquier punto de la región izquierda, pasará lo mismo de antes, y si la ponemos en la región derecha, ídem de lienzo, pero *¿qué pasa si la ponemos justo en el borde entre ambos flujos de agua?* ¡Ah, ahí la cosa cambia! La pelota recibe agua en un sentido por su izquierda, y agua en sentido contrario por su derecha, de modo que –si no es absolutamente lisa, y en nuestra analogía no lo es porque lo digo yo– **la pelota girará**. En esa línea de frontera entre ambas regiones, el *rotacional no es cero*. De modo que aquí sí, podemos decir si gira mucho o poco y hacia dónde.

En nuestro ejemplo, la pelota girará tanto más deprisa cuanto mayor sea la corriente a ambos lados –no tenemos que preocuparnos por cuantificar esto–, y lo hará en el sentido que se muestra abajo y que, creo, es bastante intuitivo si te lo imaginas:



De modo que arriba estás viendo un ejemplo claro en el que $\mathbf{\nabla} \times \mathbf{V} \neq 0$. Matemáticamente, para representar ese sentido de giro, en vez de hacer un montón de flechitas girando como aparecen arriba, se utiliza un único vector que va en la dirección del eje de giro y en el sentido en el que avanzaría un tornillo que gira como nuestra pelota:



Claro, si no tienes mucha experiencia con tornillos –o tapas de rosca, o grifos–, tal vez no veas la relación entre el giro y la flecha con claridad, pero basta con que tomes un frasco con tapa de rosca y gires la tapa en un sentido: verás que la tapa «avanza» en la dirección de la flecha de arriba. No es más que una forma concisa y nada ambigua de representar la dirección de cualquier giro en Física.

Naturalmente, el campo eléctrico no es agua fluyendo, luego $\nabla \times \mathbf{V}$ no representa el giro de ninguna pelota, pero imaginarlo así puede ayudarte a visualizar lo que le sucede al campo en un punto determinado. La parte izquierda de la ecuación de Faraday-Maxwell, por tanto, no es más que **el rotacional del campo eléctrico**, su «turbulencia» en un punto determinado, que nos indica el giro de la pelotita imaginaria si el campo fuera agua. Sí, ya lo sé, una abstracción sobre otra abstracción sobre... pero así son las cosas. *¿Qué hay de la parte derecha?*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Dicho «en fino», $\partial/\partial t$ es la *derivada parcial respecto al tiempo* de algo. Dicho en cristiano, representa el **ritmo de cambio** de ese algo. $\partial \mathbf{B}/\partial t$ es, por lo tanto, el **ritmo de cambio del campo magnético**. Si $\partial \mathbf{B}/\partial t$ es cero, es que el campo magnético no cambia en el tiempo. Si es pequeño, es que el cambio es gradual y suave, y si es grande indica que es un cambio muy violento; además, puesto que B es un vector con dirección, $\partial \mathbf{B}/\partial t$ también lo es: tiene la dirección de cambio del campo magnético.

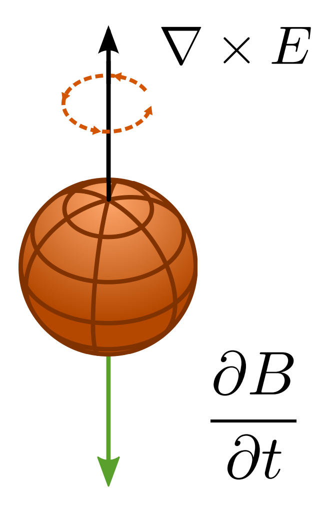
Por ejemplo, supongamos que el campo magnético va hacia la derecha y vale siempre lo mismo: entonces, $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$. Si va hacia la derecha y cada vez se hace más grande, está «cambiando hacia la derecha», luego $\partial \mathbf{B}/\partial t$ irá hacia la derecha –y será tanto mayor cuanto más violento es el crecimiento–, mientras que si el campo va hacia la derecha pero se hace más pequeño, estará «cambiando hacia la izquierda», luego $\partial \mathbf{B}/\partial t$ irá hacia la izquierda y será tanto mayor cuanto más violento sea el decrecimiento.

De manera que la parte derecha de la ley de Faraday, $-\partial \mathbf{B}/\partial t$, es la rapidez de cambio en el campo magnético, pero va justo en contra de ese cambio, de ahí el signo menos delante. Por lo tanto, si te fijas en la ecuación en su conjunto verás que dice algo así, olvidando por un momento las direcciones de los vectores –y expresado de manera tan terrible que alguno rechinará los dientes, pero yo me quedo tan ancho–: **la «turbulencia» en el campo eléctrico en un punto determinado depende de lo violento de la variación del campo magnético en ese punto**.

Observa los conceptos mezclados a izquierda y derecha: por un lado, el campo eléctrico y por el otro, el campo magnético. ¡Interdependencia entre ambos! Por un lado, la geometría de un campo –el rotacional–, por otro lado, el cambio temporal de un campo –la derivada respecto al tiempo–. *La geometría del campo eléctrico depende del cambio del campo magnético en el tiempo.*

Pero vayamos un poco más allá, fijándonos ahora en la dirección de las cosas y no sólo en su magnitud. Como ves en la ecuación, la dirección del rotacional del campo eléctrico es justo la contraria (por el signo menos) de la dirección en la

que cambia el campo magnético. Para imaginar toda la escena basta hacer lo siguiente: ver hacia dónde cambia el campo magnético e imaginar un tornillo justo en sentido contrario. El tornillo gira como lo haría una pelota colocada en ese punto –como siempre, si el campo eléctrico fuera agua fluyendo–:




Observa que aquí ya no puedo dibujar el «flujo de agua» alrededor de la pelota, porque no lo conocemos. Antes nos inventamos el flujo de agua: conocido el flujo de agua, dedujimos la dirección de rotación de la pelota, porque sólo puede ser de una manera. Pero ahora estamos haciendo lo contrario — conocemos el giro de la pelota. *¿Podemos conocer el flujo de agua?* La respuesta es que no exactamente, porque **muchos posibles flujos de agua harían girar nuestra pelota exactamente de esta manera**. Por eso las ecuaciones de Maxwell son varias: la estructura exacta del campo eléctrico depende de otras ecuaciones, no sólo ésta, que nos indica una de las características de la geometría del campo, pero no nos da la información completa (o sólo haría falta una ecuación, claro).

Eso sí, hay algo que sí sabemos seguro en el dibujo de arriba: sea como sea el flujo de agua que hace girar la pelota, dado que la pelota gira (es decir, dado que el rotacional no es cero), *tiene que haber agua moviéndose contra la pelota.* No sabemos exactamente cómo se mueve, pero sí que se mueve, y que lo hace de un modo que hace girar la pelota. Esto puede parecer una obviedad, pero tiene consecuencias importantísimas que veremos en un momento.

La razón de la importancia del párrafo anterior es que hay algo escondido aquí que es más profundo de lo que parece. Imagina que, en un sitio determinado, en el vacío, *en ausencia de cargas eléctricas*, de modo que no hay campo eléctrico de ningún tipo, llevamos un imán. Y, como quien no quiere la cosa, movemos ese imán de un lado a otro con la mano. La ecuación de Faraday-Maxwell nos dice que, ya que está cambiando el campo magnético (pues al mover el imán el campo aumenta en unos lugares y disminuye en otros), debe haber «turbulencias» en el campo eléctrico: una mini-pelota sensible al campo como si fuera agua debería ponerse a girar. Hasta aquí, todo normal, ¿verdad?

De modo que movemos el imán de un lado a otro, cambia el campo magnético, surge la «turbulencia» en el campo eléctrico y nuestra pelota imaginaria se pone a girar en el sentido que debe de acuerdo con la ecuación, a causa del campo eléctrico. Pero, un momento...

*¿Qué campo eléctrico?*

¡No había ninguno! *Ésa* es la profundidad de la que estoy hablando. La ecuación no exige en ningún momento que haya un campo eléctrico preexistente para que se cumpla: la

ecuación representa un principio físico universal. **El campo magnético variable en el tiempo es capaz de producir un campo eléctrico de la nada** tal que su rotacional tenga sentido contrario al del cambio del campo magnético. Es como si hacer algo en un lugar determinado causara, de manera garantizada, una turbulencia en el agua… incluso cuando estás en un sitio en el que no hay agua, en cuyo caso aparece agua turbulenta.

«*¿Cómo es posible esto tan absurdo?*», puedes estar pensando. «*¿Cómo sale ese campo eléctrico de la nada?*» Tengo dos cosas que decir al respecto, una corta y objetiva y otra larga y más subjetiva. La concreta es bien simple: que aparezca un campo eléctrico no es porque la ecuación de Faraday-Maxwell sea un conjuro mágico, es al revés: el campo surge de este modo, y lo hemos comprobado infinidad de veces de manera experimental. **La ecuación no es más que la expresión formal de ese hecho empírico**. Si te parece raro es simplemente que el Universo es raro, no es culpa de Michael ni de James.

Lo más largo que tengo que decir es bastante poco riguroso y más bien poético, pero tal vez te ayude a aceptar mejor que aparezca un campo eléctrico de la nada. Los siguientes dos párrafos no llegan siquiera a analogía, y negaré haberlos escrito con ayuda de mi abogado si hace falta.

Puedes imaginar el vacío, no como «nada», sino como una especie de océano perfectamente transparente en absoluta calma –algo parecido al *éter* de los antiguos–. Cuando está en esta calma absoluta, es imposible notar su presencia. Sin embargo, ese océano puede oscilar con olas que sí podemos notar; existen dos tipos de olas: las que «suben y bajan», y las que van a «izquierda y derecha» (poco importan las direccio-

nes). A las oscilaciones arriba y abajo las llamamos «campo eléctrico», y a las oscilaciones a izquierda y derecha, «campo magnético».

Ni un campo ni otro son «cosas», ni aparecen «de la nada»: son la expresión de la oscilación de ese océano invisible que es el vacío y la manera en la que podemos notar su presencia. Al perturbarlo con un campo magnético variable, podemos crear en él una turbulencia que se convierte en un campo eléctrico –y, como veremos más adelante, también al revés–. No aparece algo nuevo: *lo que ya existía se mueve de una manera diferente.*

Dejando aparte estas disquisiciones teóricas, volvamos de nuevo a lo práctico. *¿Cómo reconciliar esta forma tan abstracta de expresar el principio físico con el experimento original de Faraday?* Parece más difícil de lo que es en realidad. Para empezar, cuando el circuito original está apagado o encendido, el anillo de hierro está imantado con un campo magnético constante. Nada cambia en el campo magnético luego, tanto en un caso como en otro –apagado o encendido–, $\partial \mathbf{B}/\partial t = 0$, luego $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. No hay «turbulencia» en el campo eléctrico.

Pero, cuando se enciende el circuito de la izquierda y se imanta el trozo de hierro, durante el cortísimo proceso de imantación en el que se pasa de ausencia de campo magnético a presencia de campo magnético, $\partial \mathbf{B}/\partial t$ no es nulo. Por lo tanto, aparece un $\nabla \times \mathbf{E}$ que tampoco es nulo (y que va justo en contra del anterior). Sí, antes no había campo eléctrico, pero ahora sí lo hay, a consecuencia de la variación en el tiempo del campo magnético.

Como consecuencia de la existencia de ese campo eléctrico,

las cargas eléctricas del segundo circuito (los electrones) empiezan a moverse por el cable: se genera una corriente eléctrica. Pero claro, una vez que el trozo de hierro ya se ha imantado completamente, el campo magnético ya no varía, desaparece su efecto sobre el campo eléctrico y éste deja de existir. Las cargas se paran, y permanecen paradas mientras nada más cambie.

Al apagar el primer circuito, pasa lo mismo pero al revés: el campo magnético desciende hasta anularse y, mientras lo hace, aparece un rotacional del campo eléctrico justo en contra del anterior, y esto hace que los electrones del cable se muevan justo al revés que antes. Una vez el trozo de hierro ya no es un imán, ya que $\partial \mathbf{B}/\partial t$ es otra vez cero, deja de haber movimiento en el cable por la ausencia de campo eléctrico.

Aunque no es el objetivo de este capítulo –que ya es demasiado largo– explorar las consecuencias prácticas de este principio físico, no es difícil imaginar su utilidad: para generar una corriente eléctrica no hace falta más que un cable, sin pila ni nada parecido, y un imán; al mover el imán cerca del cable, $\partial \mathbf{B}/\partial t$ produce un $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}$ y las cargas del cable se mueven: *¡hemos producido una corriente eléctrica simplemente moviendo el imán!* El problema, claro, es que en cuanto dejamos de mover el imán desaparece el efecto.

La solución es moverlo todo el rato: por ejemplo, uniendo los imanes a una rueda y haciendo que la rueda gire constantemente. El propio Faraday ya pensó en esto (así de inteligente era), y hoy en día empleamos este principio para producir prácticamente toda la corriente eléctrica que utilizamos. La diferencia entre unos sistemas y otros de generación de corriente suele estar en cómo conseguimos que gire la rueda

(con agua, vapor muy caliente, viento, etc.).

El caso es que, dicho todo esto, podemos volver a mirar a la ecuación de Maxwell-Faraday y, espero, lanzar una pequeña sonrisa de afecto hacia ella, una vez sus misterios han dejado de serlo:

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Existe, por cierto, una versión alternativa que considera la posible existencia de *carga magnética*, como mencionamos en el capítulo anterior, pero esa carga magnética aparece de un modo que explicaremos en el siguiente capítulo, de manera que hablaremos de la versión «modificada» entonces.

# 5. Ley de Ampère-Maxwell

Antes de zambullirnos en la cuarta de las ecuaciones, un breve recordatorio muy rápido de lo que las tres que ya conocemos nos dicen sobre el electromagnetismo, aunque sea simplemente para que disfrutes de lo que sabes:

- $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$; Las líneas de campo eléctrico nacen en las cargas positivas y mueren en las negativas.
- $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; Las líneas de campo magnético no tienen principio ni fin, son siempre cerradas.
- $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$; Un campo magnético variable en el tiempo produce un campo eléctrico incluso en ausencia de cargas, y el campo eléctrico producido es perpendicular a la variación del campo magnético.

La ecuación de este capítulo es, matemáticamente, la más compleja y larga de las cuatro, ¡pero no te preocupes! Tenemos una ventaja enorme: ya no eres el mismo que antes de empezar con la primera ecuación. A estas alturas, tras ver las otras tres, ya estás curtido, y creo que tal vez la más difícil de las cuatro a priori se convierta en una de las más sencillas; veremos. En cualquier caso, desentrañemos los secretos de la

**ley de Ampère-Maxwell**, a veces llamada simplemente *ley de Ampère* (en un momento veremos por qué prefiero el nombre más largo).

Como siempre, antes de entrar en detalles, aquí tienes la ecuación en cuestión en todo su esplendor intimidatorio:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Tampoco es tan terrible, ¿verdad? Hay algún símbolo que no ha aparecido hasta ahora, pero casi todos son ya viejos conocidos. Como puedes ver, a la derecha del igual hay una suma de dos términos, que es la razón del peculiar nombre de esta ley: el primer término fue propuesto por Ampère y el segundo por el propio Maxwell.

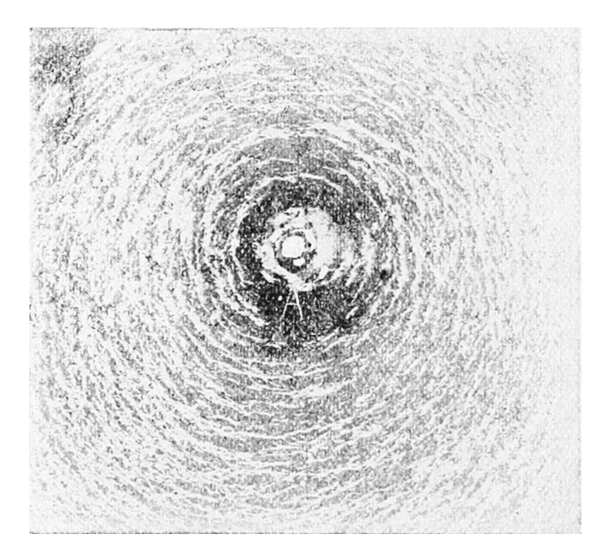
Sin embargo, el primer héroe en esta historia no es ni el uno ni el otro, sino Hans Christian Ørsted. Como dijimos en la introducción histórica, en 1820 este danés realizó un experimento crucial en el estudio del electromagnetismo: al conectar un circuito con una pila y un cable, observó que **alrededor del cable aparecía un campo magnético** que podía hacer girar una aguja imantada –como la de una brújula–. No se trató de un descubrimiento accidental, por cierto: Ørsted ya sospechaba que existía una conexión entre los fenómenos eléctricos y magnéticos, y la llevaba buscando ya tiempo.

Aunque el propio Ørsted no fue capaz de obtener una ecuación matemática que describiese el campo magnético genera-

do por una corriente eléctrica, sí pudo describir lo que sucedía de manera general tras una batería de experimentos, y todas las propiedades del campo magnético eran bastante intuitivas excepto una:

- El campo magnético era *tanto más intenso cuanto mayor era la intensidad de la corriente eléctrica* (una proporcionalidad directa a la intensidad).
- El campo magnético era *tanto más intenso cuanto más cerca del cable era medido* (una proporcionalidad inversa a la distancia).
- El campo magnético nunca se dirigía hacia el cable, sino que *era exactamente perpendicular a él* en todos los puntos, como si «rodease» el cable.

Las dos primeras características, como digo, parecen razonables. La tercera es algo más extraña; el campo eléctrico «nace» y «muere» en sus fuentes, las cargas eléctricas, pero en los experimentos de Ørsted el campo magnético no hacía lo mismo. El danés esperaba que las líneas del campo magnético se dirigieran alejándose del cable o acercándose hacia él, pero no que hicieran algo como esto, que es lo que se observa al esparcir limaduras de hierro alrededor de un cable recorrido por una corriente eléctrica (y que seguro que has visto alguna vez):



*Limaduras de hierro orientadas alrededor de un cable (A, dirigido perpendicularmente al papel). Popular Science Monthly, 1895.*

Era como si el cable fuera el centro de un «remolino», el origen de una especie de turbulencia en el campo magnético. ¿Te suena esto? Sí, naturalmente que sí — el bueno de Ørsted, aunque no lo expresase en estos términos, estaba esperando que la corriente eléctrica originase una *divergencia* del campo magnético, pero lo que estaba sucediendo es que la corriente eléctrica producía un *rotacional* dirigido en el sentido de la propia corriente.

Cuando los resultados de Ørsted llegaron a Francia despertaron un enorme interés en André-Marie Ampère. En una semana, el francés publicó ya una descripción más rigurosa y detallada de lo que había sucedido en esos experimentos, e incluso explicó fenómenos adicionales, como el hecho de que dos cables recorridos por sendas corrientes eléctricas podrían repelerse o atraerse dependiendo de los sentidos de las

corrientes.

En los años siguientes, Ampère se dedicó al estudio de lo que por entonces se denominaba *electrodinámica* y hoy *electromagnetismo*. En 1826 publicó una ley matemática que explicaba la experiencia de Ørsted y muchas otras: **una ley matemática que postulaba las corrientes eléctricas como las fuentes del campo magnético**. Aunque esa ley tenía una forma ligeramente diferente a la que utilizamos aquí, es equivalente a ella. Podríamos escribir esta ley de Ampère así:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Si la comparas con la versión moderna del principio del capítulo, verás que falta el segundo término, del que hablaremos luego pues fue introducido por James Clerk Maxwell y no existía en la original. Examinemos esta versión del buen André-Marie paso a paso, como hemos hecho antes.

Como puedes ver, el miembro de la izquierda, $\nabla \times \mathbf{B}$ , no es más que el rotacional del campo magnético. Al igual que la ley de Gauss para el campo magnético era la contrapartida para ese campo de la ley de Gauss para el campo eléctrico, la ley de Ampère es la contrapartida para el campo magnético de la ley de Faraday para el eléctrico — como dijimos en capítulos anteriores, las cuatro ecuaciones van «a pares».

Por tanto, esta ecuación nos informa sobre el rotacional del campo magnético, es decir, sobre el modo en el que las líneas de campo «giran» alrededor de cada punto del espacio, del

mismo modo que la ley de Faraday hacía lo propio con el campo eléctrico. Esta vez el miembro de la derecha no es nulo, como sucedía en el caso de $\nabla \cdot \mathbf{B}$, con lo que en este capítulo no hablaremos de cómo *no se comporta* el campo magnético. En esta ocasión *sí* hablaremos de sus fuentes primarias.

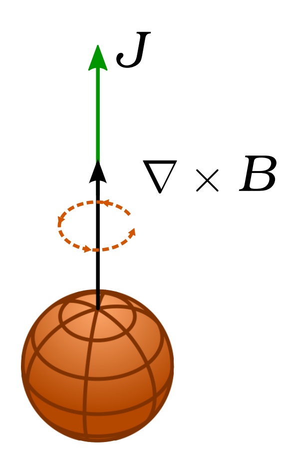
El miembro de la derecha es bien simple, $\mu_0 \mathbf{J}$. La letra griega *mu* con el subíndice 0, $\mu_0$, apareció de pasada en un capítulo anterior, y es parecida a $\varepsilon_0$ –la constante eléctrica o permitividad eléctrica del vacío–; en este caso $\mu_0$ recibe el nombre de **permeabilidad magnética del vacío** o, a veces, *constante magnética.* Se trata de una constante universal cuyo valor, aunque no sea importante ahora mismo, es $4\pi \times 10^{-7}$ N A$^{-2}$. Sí será importante más adelante, pero lo relevante ahora es eso: que es una constante.

Por otro lado, esa $\mathbf{J}$ es lo único realmente nuevo en esta ecuación, y constituye, ¡por fin!, la fuente básica de los campos magnéticos. Se trata de la **densidad de corriente eléctrica**, y es parecida a la densidad de carga eléctrica que apareció en la ley de Gauss para el campo eléctrico. Si $\mathbf{J}$ es muy grande en un punto determinado, es que hay concentrada allí una gran intensidad de corriente eléctrica, y si en un punto $\mathbf{J} = 0$ eso significa que allí no hay corriente alguna.

Una corriente eléctrica no es más que un conjunto de cargas eléctricas en movimiento. Cuanta más carga se mueva cada segundo (ya sea porque hay mucha carga moviéndose, o porque la carga que hay se mueve muy deprisa), mayor intensidad de corriente existe. La intensidad se mide en amperios (A), en honor a uno de nuestros héroes de este libro, por supuesto.

$\mathbf{J}$ es la densidad de corriente, de modo que indica la intensidad que atraviesa cada metro cuadrado de superficie. Podríamos entrar en sutilezas sobre esto, pero no nos hace ninguna falta: un cable recorrido por una corriente eléctrica tiene una densidad de corriente $\mathbf{J}$ determinada (tanto mayor cuanto mayor sea la intensidad que circula por el cable), pues hay electrones circulando por él. Y la dirección de $\mathbf{J}$ será la del cable, pues es la dirección en la que se mueven las cargas.

Sin embargo, como puedes ver en la ecuación, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Dicho con palabras, *la dirección de la corriente no coincide con la del campo magnético*, sino con el «eje de giro» del rotacional. Si recuerdas nuestro ejemplo de la pelota y el agua que la hacía girar, en este caso el «agua» es el campo magnético, y el eje de giro de la pelota es la corriente eléctrica, con lo que el campo magnético «gira» alrededor del eje definido por el cable:




Desde luego, como dijimos en la ley de Faraday, no hay nada «girando»: como se ve en la fotografía de las limaduras de hierro y el cable, lo que realmente sucede es que el campo

magnético es siempre perpendicular a la línea que une cualquier punto con el cable, como la rueda de una bicicleta y sus radios: el cable eléctrico es el eje de la rueda, y el campo magnético tiene la dirección del neumático, perpendicular a los radios. Naturalmente, esto no es sorprendente ni determina lo que sucedió cuando Ørsted puso las limaduras alrededor del cable, sino justamente al revés: esta ley es una expresión elegante y precisa del conocimiento adquirido por el danés y por Ampère.

Por lo tanto, esta primera parte de la ley de Ampère-Maxwell nos dice algo esencial: **las fuentes primarias del campo magnético son las corrientes eléctricas**, es decir, las cargas en movimiento. Como puedes ver, combinando esta ley con la de Gauss para el campo eléctrico, las fuentes últimas de ambos campos son las cargas eléctricas: sin ellas no habría ni un campo ni el otro. La diferencia entre ambos es que para que exista un campo eléctrico simplemente hacen falta cargas. Sin embargo, para que exista un campo magnético tienen que existir cargas *que se muevan*, es decir, corrientes eléctricas. Esto lleva a reflexiones curiosas de las que hablaremos más adelante.

Antes de seguir, recordarás que al hablar de la ecuación equivalente a ésta, pero para el campo eléctrico, la ley de Faraday, dijimos que tendría una forma diferente de existir las cargas magnéticas. Bien, ahora que hemos visto la primera parte de la ecuación, creo que la anterior «modificada» para incluir las hipotéticas cargas o monopolos magnéticos debería ser clara y meridiana.

Recordarás que, de existir cargas magnéticas, éstas serían las fuentes de la divergencia del campo magnético, lo mismo

que las cargas eléctricas lo son del campo eléctrico. Pero acabamos de ver que las cargas eléctricas *en movimiento* generan un rotacional del campo magnético (es decir, del «otro campo»), con lo que también podría pasar lo contrario: de existir cargas magnéticas *en movimiento*, éstas generarían un rotacional del campo eléctrico.

De este modo, la ley de Faraday pasaría de su forma original, en la que la estudiamos, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$, a tener un término nuevo debido a las cargas magnéticas,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J}_m\right)$$

Una vez más, se trata de una ecuación hipotética y no tiene sentido tomársela demasiado en serio hasta que se detecte algún monopolo magnético, pero cuando mires las cuatro ecuaciones juntas creo que estarás de acuerdo conmigo en que son más elegantes incluyendo cargas magnéticas.

Pero volviendo a la ecuación que nos ocupa, el caso es que, tal como está escrita, la ley de Ampère no es completa. James Maxwell se percató de que, al igual que un campo magnético variable produce un campo eléctrico «de la nada», como vimos en la ley de Faraday, también sucede lo contrario: un campo eléctrico variable produce un campo magnético.

Expresado matemáticamente, esto significa que la ley de Ampère requiere de un término más:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ahora sí está completa, y ves el porqué del nombre de *ley de Ampère-Maxwell*: ambos científicos contribuyeron parte de ella, aunque desde luego la mayor parte del mérito es del francés. Como puedes ver, en esta ecuación aparecen además las dos constantes, la eléctrica y la magnética, que hemos mencionado en este librito. El significado físico del término nuevo debería, a estas alturas, estar bastante claro: **un campo eléctrico variable produce un rotacional del campo magnético**, incluso en ausencia de corrientes.

De modo que, una vez más, vemos cómo uno de los dos campos, de variar en el tiempo, puede producir una especie de perturbación que hace aparecer al otro. En este aspecto son completamente simétricos: cualquiera de los dos, de ser variable, produce un rotacional del otro campo. De hecho, parece casi como si pudiéramos «hacer trampa» y sacar campos de la nada: un campo eléctrico que varíe y produzca un campo magnético que varíe y que, por tanto, produzca un campo eléctrico que varíe y que... *raro, ¿no?*

De ese asunto y de la relación íntima entre ambos campos hablaremos al hacerlo de la ecuación de onda electromagnética. Pero, antes de eso, ahora que ya son viejas conocidas para ti, terminemos este capítulo con las cuatro juntas. Si tanto tú como yo hemos hecho bien nuestro trabajo, ya no deberían producir desasosiego, sino una sonrisa de complicidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Observa ahora las mismas cuatro ecuaciones pero considerando la existencia de cargas o monopolos magnéticos; como siempre, he representado la densidad de carga magnética como $\rho_m$ y la densidad de corriente magnética como $\mathbf{J}_m$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\left(\mu_0 \mathbf{J}_m + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Como puedes ver, constantes aparte (el valor de las constantes depende del sistema de unidades que empleemos), la versión que incluye cargas magnéticas tiene una simetría mucho mayor. Naturalmente, el placer estético que produce una ecuación no es un factor que determine que sea cierta o no — aquí lo importante es si se detectan o no monopolos magnéticos y, por ahora, es que no.

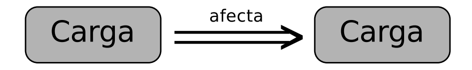
# 6. Ley de Lorentz

Tras desgranar las cuatro ecuaciones de Maxwell, podemos dedicarnos a explorar algunas de sus consecuencias más interesantes; en este capítulo pondremos la guinda a las ecuaciones, un pequeño detalle sin el que no describen de manera útil el comportamiento de las cosas.

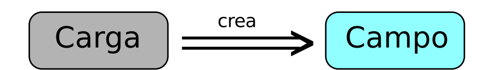
Como hemos visto, las cuatro ecuaciones establecen *cuáles son las fuentes y las propiedades de los campos eléctrico y magnético*. Como hemos visto, el campo electromagnético tiene cuatro fuentes fundamentales: las cargas eléctricas, las corrientes eléctricas –es decir, las cargas en movimiento–, las variaciones en el campo eléctrico y las variaciones en el campo magnético.

Pero eso es sólo la mitad de la historia: hemos estudiado los campos eléctrico y magnético como *consecuencias*, pero la razón por la cual nos pusimos a estudiarlos en primer lugar es porque notamos sus efectos a nuestro alrededor: *¿qué consecuencias tienen esos dos campos sobre la materia?* Como recordarás, cuando hablamos sobre la ley de Gauss para el campo eléctrico dijimos que en cierto sentido era una reformulación más moderna de una ley anterior, la ley de Coulomb que describía cómo las cargas del mismo signo se repelen y las de signos contrarios se atraen.

La ley de Gauss, sin embargo, no decía absolutamente nada de cargas que se repelen o se atraen, sino que simplemente establecía la **creación del campo eléctrico a causa de la existencia de cargas**. En tiempos de Coulomb, la interacción entre cargas se estudiaba de una manera directa, como algo así:




Sin embargo, la formulación de Maxwell del electromagnetismo es más abstracta y tiene algo así como dos pasos. Como hemos visto, la materia cargada crea campos — en el caso de la ley de Gauss, las cargas crean un campo eléctrico a su alrededor. Podríamos representar la ley de Gauss así:



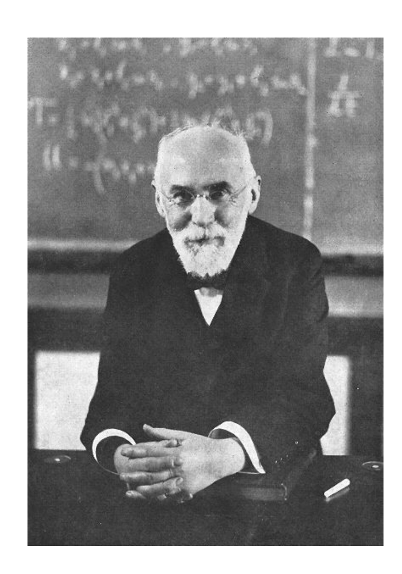

A su vez, ese campo afecta a la materia cargada:




Y es este segundo «paso», la influencia de los campos sobre la materia cargada –es decir, la fuerza ejercida por los campos sobre las cargas– el que no aparece en ninguna de las ecuaciones de Maxwell y al que nos vamos a dedicar brevemente

ahora. Como puedes ver, el efecto final de unas cargas sobre otras es el mismo que en la versión de Coulomb: el campo aquí no es más que un intermediario de la interacción, que tiene el mismo efecto que antes sobre la segunda carga. Sin embargo, como hemos visto a lo largo del libro, ambos campos interaccionan entre sí y producen efectos a veces sorprendentes –y a ellos dedicaremos el siguiente capítulo, por cierto–.

Afortunadamente, a diferencia de la generación de campos a partir de la materia, el efecto de los campos sobre ella es más simple y fue resumido en una sola ley física por un viejo amigo de *El Tamiz*, Hendrink Antoon Lorentz. Este simpático y genial holandés fue el ganador del Premio Nobel de Física de 1902 por su hipótesis de que la radiación electromagnética era creada por minúsculas partículas cargadas en la materia, pero ahora vuelve a ser el héroe de nuestra historia.



*Hendrink Antoon Lorentz (1853-1928).*

Sin embargo, como suele pasar en ciencia, el resultado no es la labor de un sólo héroe, sino de una larga cadena de ellos. Como ya hemos visto, Charles-Augustin de Coulomb había establecido ya una ley matemática que describía la atracción y repulsión entre cargas –debida, en términos más modernos, al campo eléctrico–, y André-Marie Ampère había llegado a una ley similar que describía la atracción y repulsión entre corrientes eléctricas –en términos post-Maxwell, debida al campo magnético–. De modo que conocíamos ya, de manera más simple, los efectos de los campos sobre la materia cargada, pero nos hacía falta reformular estas leyes en términos post-Maxwell, es decir, en términos explícitos del campo eléctrico y magnético. De ahí que hiciera falta algo más después de Coulomb y Ampère.

El siguiente protagonista es otro viejo conocido, J. J. Thomson, galardonado con el Premio Nobel de Física de 1906 por su descubrimiento del electrón. El británico trató de encontrar una ley matemática que describiera la fuerza que sufren las cargas debida al campo magnético B y estuvo a punto de lograrlo a la perfección. De hecho, la expresión obtenida por Thomson en 1881 es la correcta excepto por un factor de 1/2 debido a algunos errores de cálculo.

Puede parecer un espanto obtener una expresión que predice una fuerza magnética que es la mitad de la real, pero el logro de Thomson es inmenso: aunque el valor numérico no sea el bueno, el comportamiento de la materia respecto al campo estaba perfectamente descrito de forma cualitativa en su ecuación. La expresión de la fuerza magnética que obtuvo Thomson a partir de los datos experimentales era ésta, en función de la carga, la velocidad y el campo magnético:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\, q\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Sí, ese 1/2 sobra, pero veamos qué significa *cualitativamente* esta «ley de Thomson» –pongo comillas porque nadie la llama así que yo sepa– para la fuerza magnética, ya que hay una operación ahí que todavía no hemos visto específicamente en este libro. En primer lugar, la fuerza debida al campo magnético es un **producto de varios factores**, lo cual tiene una consecuencia inmediata: no puede existir una fuerza magnética si cualquiera de los factores es nulo.

Dicho de otro modo, para que algo sufra una fuerza magnética ese algo debe:

- *Tener carga eléctrica* ***q***, luego un cuerpo neutro no sufre fuerzas magnéticas.
- Estar en algún sitio en el que *exista un campo magnético* **B**, luego sin campo magnético no hay fuerza magnética, algo de perogrullo.
- *Estar moviéndose* con una velocidad **v**, luego un cuerpo en reposo no sufre una fuerza magnética.

De estas tres condiciones, la tercera me parece la menos evidente y la más interesante. De acuerdo con Thomson –y con todos los experimentos realizados, claro, pues su fórmula era una ley, es decir, una observación empírica puesta por escrito–, aunque tengamos una carga eléctrica tremenda inmersa en un campo magnético de tres pares de narices, si la carga está quieta, *no sufrirá absolutamente ninguna fuerza magnética.* ¡Ni se entera de que hay un campo!



*Thomson en el Cavendish Physical Laboratory de Cambridge.*

Si te fijas, esto tiene una bella simetría con la ley de Ampère-Maxwell que describía las fuentes del campo magnético. Como espero que recuerdes –o te suspendería si fueras mi alumno–, en aquella ley vimos que la fuente primaria del campo magnético –es decir, aparte del campo eléctrico variable– lo constituían las *corrientes eléctricas*, es decir, las cargas en movimiento.

Es decir, para que exista un campo magnético no basta con que haya cargas: debe haber cargas *moviéndose*. Pero ahora, de acuerdo con Thomson, vemos que para que una carga eléctrica sufra los efectos de un campo magnético no basta con que haya un campo y una carga: debe haber un campo y una carga *moviéndose*. **Sólo las cargas en movimiento crean** B **y sólo las cargas en movimiento sufren** B. Esto tiene una importantísima consecuencia si piensas en el hecho de que todo el movimiento es relativo, y de ella hablaremos en el último capítulo.

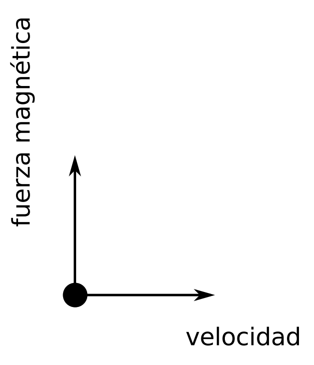
Sin embargo, nos queda una cosa más por analizar: ese $v \times B$ no es un producto cualquiera, sino un **producto vectorial** entre la velocidad y el campo, representado por ese signo de multiplicación a la antigua usanza. Aunque explicar en profundidad el significado de este operador matemático es algo que no puedo hacer aquí, sí puedo darte una idea de alguna de sus propiedades ya que, aunque «escondido», ha hecho su aparición en este libro siempre que lo hizo el rotacional. Si no, fíjate en la ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

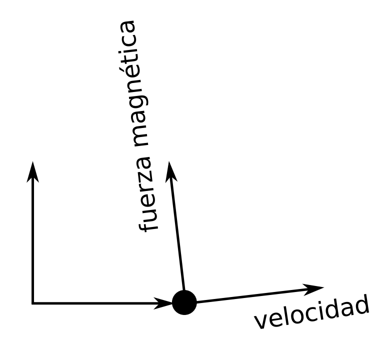
Ese producto del operador nabla por el campo eléctrico no es otra cosa que un producto vectorial. Aunque ahora no estamos multiplicando nabla sino simplemente la velocidad por el campo magnético, la propiedad fundamental es la misma en ambos casos: el resultado es siempre *perpendicular* a los dos vectores involucrados. En este caso, la consecuencia más interesante de que lo que hemos llamado «ley de Thomson» tenga un producto vectorial es la siguiente: **la fuerza magnética siempre es perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad de las cargas**.

Una vez más, si te fijas, existe una simetría con la generación del campo por la ley de Ampère-Maxwell: el campo magnético era siempre perpendicular a las corrientes eléctricas y los cables (¿recuerdas la foto del cable con las limaduras de hierro alrededor?). Del mismo modo que sucede eso, al interaccionar campo con cargas vuelve a pasar lo mismo: la fuerza que aparece sobre las cargas es perpendicular al campo.

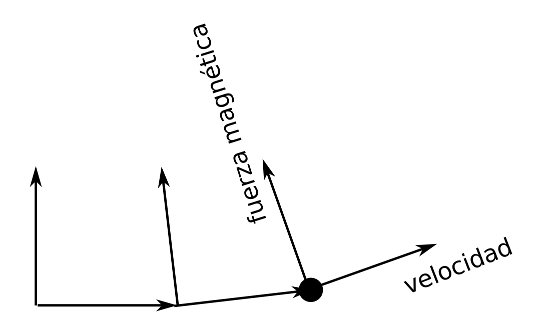
Sin embargo, más interesante aún es la otra perpendicularidad, aunque a veces una primera mirada a la ecuación la pasa por alto: la fuerza es siempre perpendicular a la velocidad. ¿Qué significa esto? Que si, por ejemplo, la carga va hacia la derecha, *la fuerza magnética nunca jamás irá hacia la derecha ni hacia la izquierda*. De hecho, nunca irá en ninguna dirección que no sea perpendicular a la dirección en la que se mueve la carga: nunca la empujará lo más mínimo «hacia delante» en su movimiento, y nunca la empujará «hacia atrás» en su movimiento. Sí podría ir, en nuestro ejemplo, hacia arriba, o hacia abajo, o en cualquier otra dirección perpendicular a la línea horizontal. Si suponemos que la partícula viaja hacia la derecha y la fuerza va, por ejemplo, hacia arriba, la situación sería algo así:




Pero claro, en el mismo instante en el que la fuerza se llevase nuestra partícula hacia arriba, la partícula ya no estaría viajando hacia la derecha, sino en diagonal hacia la derecha y un poquitín hacia arriba… luego la fuerza magnética también cambiaría de dirección y ya no iría hacia arriba, sino «hacia arriba y un poquitín hacia la izquierda», pues de acuerdo con la «ley de Thomson» debe ser perpendicular a la velocidad:




Y lo mismo vuelve a pasar todo el tiempo, por supuesto, ya que ahora la carga curva su movimiento aún más, con lo que también lo hace la fuerza:




Como puedes ver, puesto que la dirección de la fuerza va cambiando según lo hace la velocidad, nuestra partícula terminaría realizando una circunferencia. Si hubiera empezado moviéndose en otra dirección, tal vez hubiera seguido una especie de «muelle» avanzando en una dirección pero girando en otra, pero siempre hubiera aparecido algún **movimiento circular** por la propia naturaleza de la «fuerza de Thomson».

En la realidad muchas partículas subatómicas pueden frenarse o acelerar por otras razones, por ejemplo, si no están en el vacío, sino dentro de un gas en el que chocan con otras partículas y se frenan, con lo que muchas veces, en vez de circunferencias, vemos espirales. Seguro que alguna vez has visto alguna foto de una cámara de niebla y en ella aparecen cosas como ésta:

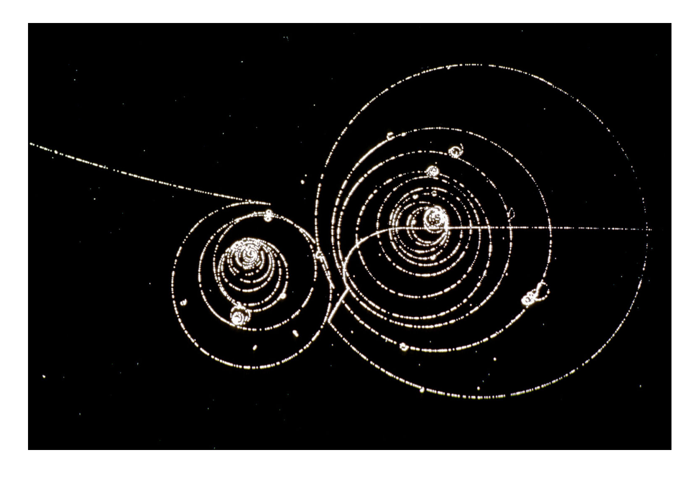


*Imagen cortesía del CERN [http://cdsweb.cern.ch/record/39472?ln=ja].*

Se trata de los rastros de las partículas producidas en la desintegración de un kaón –una partícula subatómica inestable–. Lo que me interesa ahora no son los kaones, sino que comprendas la razón de que siempre aparezcan esas espirales, y lo que significan: que en esa cámara de niebla hay un campo magnético y que la fuerza originada por ese campo sobre las partículas cargadas que se mueven en él a gran velocidad produce movimientos circulares — o, en este caso, espirales, dado que las partículas cambian su rapidez por otras razones.

Esta perpendicularidad significa además que **un campo magnético nunca jamás puede hacer que una partícula se mueva más deprisa o más despacio que antes**. Piénsalo: para que empujase la carga a moverse más rápido que antes, debería empujarla hacia delante, al menos un poco… pero eso no puede pasar, porque la fuerza es perpendicular siempre a la dirección de movimiento. Y para frenarla lo más mínimo, tendría que tirar de ella hacia atrás, ¡pero eso tampoco puede pasar! El campo magnético sólo puede hacer que las partículas «giren», modifiquen la dirección en la que se mueven, pero nunca puede modificar un ápice lo rápido que van.

Puede que estés arqueando las cejas y pensando algo como: «*Vamos a ver, Pedro, cuando pongo dos imanes cerca el uno del otro, completamente parados, empiezan a moverse cada vez más deprisa, ¡ya lo creo que sufren una fuerza hacia delante!*» Ah, sí, claro… pero tus pobres ojos humanos no están viendo lo que pasa realmente. No puedo dedicarle suficiente tiempo aquí para explicarlo en profundidad, pero es una confusión suficientemente común –y razonable– como para otorgarle al menos un párrafo.

Las partículas que componen los imanes no estaban paradas, ¡ni mucho menos! Los electrones estaban moviéndose alrededor de sus núcleos a una velocidad tremenda. Lo único que hace el campo magnético del otro imán es *curvar el movimiento de muchos electrones al unísono*, de modo que todos intenten moverse hacia el otro imán… y, debido a la atracción de Coulomb, se lleven a sus núcleos consigo, haciendo que el imán se mueva como un todo. Dicho de otro modo, la fuerza magnética no hace que las partículas se muevan más deprisa, pero sí que muchas partículas que tenían movimientos dispares «se pongan de acuerdo» y tiren juntas del objeto

macroscópico en una dirección determinada. Pero, como no vemos partículas subatómicas, pensamos ingenuamente que los imanes empezaron parados y luego empezaron a moverse.

El caso es que Thomson estableció el comportamiento cualitativo de las cargas en presencia de un campo magnético y sólo metió la pata en ese maldito 1/2. El responsable de corregirlo no fue otro que Oliver Heaviside, el siguiente héroe de este librito, quien reescribió y reorganizó las muchas ecuaciones de Maxwell como las cuatro que conocemos hoy. Heaviside obtuvo la expresión correcta en 1889:

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Una vez cuantificada la influencia del campo magnético, para completar la ley que describía la influencia del campo electromagnético sobre la materia sólo faltaba, por tanto, incorporar el campo eléctrico a esa ley; en otras palabras, hacía falta introducir ahí la ley de Coulomb reescrita en términos de los campos de Maxwell. Aquí es donde, por fin, hace su aparición el héroe final de este capítulo, Lorentz, que en 1892 publicó la expresión completa de la fuerza electromagnética sobre la materia, que incluye el efecto de los dos campos, eléctrico y magnético:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

Como sucedía en las cuatro ecuaciones de Maxwell, aquí el campo eléctrico también es más simple y sus efectos más intuitivos. Como puedes ver, en el término de **E** no hay velocidad que valga, ni productos vectoriales, ni perpendicularidades ni pamplinas. Esto tiene sus consecuencias, por supuesto.

En primer lugar, la fuerza que sufre una carga sometida únicamente a un campo eléctrico será la siguiente:

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{E}$$

Punto pelota. Para que una carga sufra una fuerza eléctrica sólo hacen falta dos cosas: una carga y un campo. No hace falta que la carga se mueva; una vez más, simetría con las ecuaciones de Maxwell, ya que la ley de Gauss establecía que las cargas eléctricas producen a su alrededor campos eléctricos, sin necesidad de moverse, y ahora pasa lo mismo pero al revés: las cargas eléctricas sufren la acción de los campos eléctricos sin necesidad de moverse.



*Albert Einstein y Hendrik Antoon Lorentz, fotografiados por Ehrenfest a la puerta de casa del último en 1921.*

La segunda diferencia con la parte establecida por Thomson y Heaviside es que aquí no hay nada perpendicular: si el campo eléctrico va en una dirección determinada, la carga sufrirá una fuerza en ese sentido o el opuesto. Es posible, por ejemplo, tener una partícula que va hacia la derecha y que el campo vaya hacia la derecha y la fuerza también: esa partícula, como consecuencia, se moverá cada vez más rápido. **Los campos eléctricos** ***sí*** **hacen que las partículas vayan más rápido o más despacio**, a diferencia de los magnéticos.

A pesar de que existen otras fuerzas fundamentales sin las que nuestro conocimiento del Universo sería incomple-

to, como la gravedad o las fuerzas nucleares, la fuerza de Lorentz –o, mejor dicho, la fuerza de Coulomb-Faraday-Ampére-Thomson-Heaviside-Maxwell-Lorentz-etcétera, porque siempre somos injustos con los nombres de las cosas– tiene una importancia difícil de expresar con palabras. Combinada con las cuatro ecuaciones de Maxwell, hizo que la última parte del siglo XIX fuera una revolución en nuestro conocimiento de la materia: además de los fenómenos eléctricos y magnéticos más evidentes, las interacciones electromagnéticas determinan las reacciones químicas, el contacto entre los cuerpos... sin este conocimiento hubiéramos sido incapaces de conocer la estructura del átomo y el comportamiento de las cosas a nuestro alrededor a escala microscópica.

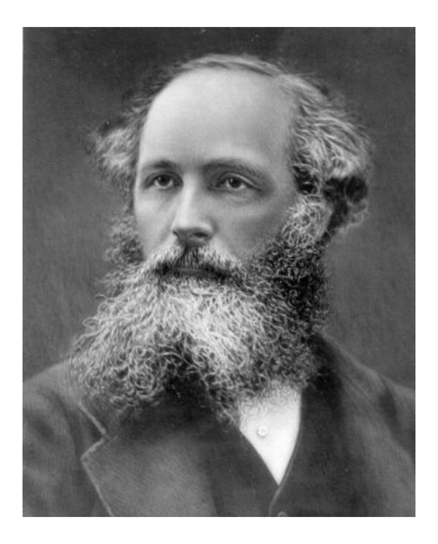
De ahí este capítulo dedicado a la fuerza de Lorentz: porque una mesa construida sólo con las ecuaciones de Maxwell estaría coja. Hace falta esta «quinta pata», la fuerza de Lorentz, para comprender lo enorme de su relevancia y su papel como fundamento de la Física del cambio de siglo, y más aún por los cambios que originaría esta teoría electromagnética a principios del XX. Pero eso es otra historia, y tendrá que esperar a otra ocasión.

Como puedes ver, tras la creación de campos por parte de la materia, la ley de Lorentz establece el segundo paso de la relación materia-campos, es decir, la influencia de los campos sobre la materia. Pero ¿qué hay de la influencia de los campos unos sobre otros? Ahí es donde James Clerk Maxwell revolucionó la Física y dejó al mundo boquiabierto, pero de ello hablaremos en el siguiente capítulo.

# 7. La ecuación de onda electromagnética

Como vimos al hablar de las dos ecuaciones que relacionan variación de campo magnético con aparición de campo eléctrico y viceversa, es posible que aparezca un campo en ausencia de sus fuentes primarias si el otro varía en el tiempo.

Maxwell podría haber considerado este hecho como una simple curiosidad de los campos eléctrico y magnético, pero reflexionando sobre ello se dio cuenta de dos cosas: por un lado, de que ambos campos estaban entrelazados de un modo que los convertía en un auténtico *campo electromagnético*; por otro, de que las ecuaciones que regían su comportamiento y que el propio Maxwell había obtenido predecían que la interacción entre ambos campos generaría ondas en el espacio. Manipulando sus ecuaciones, el escocés obtuvo el tesoro al que nos dedicaremos a continuación: la **ecuación de onda electromagnética**.



*James Clerk Maxwell (1831-1879).*

A diferencia del capítulo anterior, éste tiene un único héroe: el propio James Clerk, que obtuvo una de las predicciones teóricas más sorprendentes realizadas hasta entonces utilizando simplemente un papel, un lápiz y su cerebro. Mi objetivo, por lo tanto, es intentar explicar cómo es posible predecir la existencia de ondas electromagnéticas a partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell, y luego hablar sobre algunas de las consecuencias de este hecho. ¿Conseguiré hacerlo sin extenderme más de la cuenta? No, seguramente no.

Antes de empezar, por cierto, un par de avisos: en primer lugar, con el cálculo vectorial adecuado y la versión moderna de las ecuaciones (es decir, las ecuaciones *à la Heaviside*, porque el cálculo original de Maxwell es más engorroso) es posible obtener una ecuación de onda en un abrir y cerrar de ojos. Sin embargo, para ello hace falta conocer bien operadores como el rotacional o el laplaciano, saber reconocer una

ecuación de onda y, en resumen, saber la suficiente Física como para no tener que estar leyendo esto. Además, a menudo se realizan esas manipulaciones matemáticas sin ahondar en el significado físico de lo que se está haciendo, con lo que tampoco se aprende tanto haciendo las operaciones sin más. De modo que no lo haremos así; realmente haremos algo parecido, pero con palabras y no tanto ecuaciones.

Eso sí, para poder hacerlo hay una contrapartida: voy a realizar simplificaciones que harían al gentil Maxwell mascullar obscenidades, y al bueno de Heaviside sollozar como un niño al que han quitado a su perrito. Si es necesario voy a trampear y obviar pegas que harán rechinar los dientes a quienes sabéis de esto — ¡ja! Si seguís leyendo, merecéis todo lo que os pase.

Finalmente, a pesar de que razonaremos con palabras y no espero que sepas más matemáticas que las que se aprenden en el colegio, este capítulo es denso y requiere esfuerzo; realizaremos razonamientos lógicos –o eso espero–, e iremos poco a poco, pero es posible que este capítulo requiera una segunda lectura antes de que lo asimiles del todo. Avisado estás.

Dicho todo esto, partamos de nuestras ya familiares cuatro ecuaciones de Maxwell, que deberían empezar a parecerte como los muebles de la casa de tus padres:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Los términos de la derecha, como espero que recuerdes, son las fuentes de los campos eléctrico y magnético, y había básicamente dos tipos de fuentes, que alguna vez en esta monografía hemos llamado primarias y secundarias: las cargas eléctricas –por sí mismas o en movimiento– eran las causas primarias de los campos, y las variaciones en el tiempo de los propios campos eran las secundarias. De no ser por esas fuentes secundarias, los campos eléctrico y magnético serían muy aburridos, ya que sólo podrían existir alrededor de las cargas eléctricas.

Sin embargo, podemos eliminar toda la materia de las ecuaciones: ni átomos, ni protones, ni electrones, ni nada; en términos de nuestras ecuaciones, podemos suponer que no hay ni $\rho$ ni $\mathbf{J}$ Incluso así, suponiendo que estamos en el vacío, las cuatro ecuaciones siguen estando ahí, más concisas, pero no nulas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

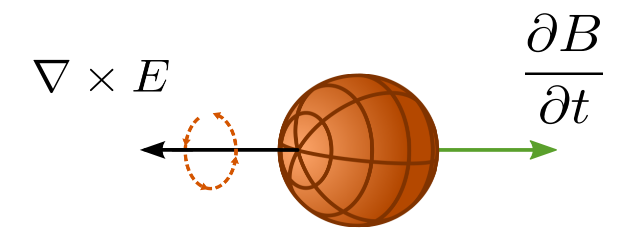
Si te fijas, al eliminar las cargas las ecuaciones del campo eléctrico y el magnético se parecen mucho más que antes: uno estaba afectado por las cargas en sí mismas mientras que el otro estaba afectado por las cargas en movimiento, pero al eliminar todas las cargas, esa diferencia desaparece. De hecho, las dos primeras ecuaciones sí tienen la apariencia que cabría esperar en ausencia de cargas: no hay fuentes de los campos. Pero, como ya dijimos al hablar de las dos últimas, la variación en cualquiera de los dos campos produce un rotacional del otro campo incluso en ausencia de cargas y corrientes. Es en estas dos ecuaciones en las que vamos a fijarnos ahora.

El propio Maxwell hizo algo así, y le dio mucho que pensar el hecho de que, incluso eliminando las cargas y las corrientes, siguiera habiendo términos a la derecha de las ecuaciones. ¿Qué quería esto decir sobre cada campo? El problema para intentar desentrañar el misterio es que, como puedes ver, en cada una de las dos ecuaciones de abajo aparece *un campo en función del otro*. Para obtener conclusiones sobre alguno de los dos campos, lo ideal sería encontrar una ecuación que describiera sólo ese campo –por ejemplo el magnético–, de modo que tuviéramos información sobre él que no dependiera explícitamente del otro. Eso es precisamente lo que Maxwell se propuso hacer manipulando sus ecuaciones — es decir, pensando sobre el problema de una manera formal.

Nosotros haremos lo propio pero a nuestro estilo, claro; por suerte para nosotros (y desgracia para ellos), Maxwell y Heaviside no van a ver esto.

Empecemos con un ejemplo concreto. Supongamos que, en un punto cualquiera del vacío, existe un campo magnético que está cambiando en el tiempo, por ejemplo, aumentando hacia la derecha cada vez más deprisa; evidentemente, para que esto pase algo tiene que haber creado ese campo magnético, y de eso hablaremos más adelante, pero por ahora eso no nos importa, mientras lo que quiera que haya creado el campo esté lejos de aquí para no perturbar nuestras bellas ecuaciones sin cargas; digamos que alguien está agitando un protón a un kilómetro de distancia, por ejemplo.

Lo importante es que tenemos un campo magnético dirigido hacia la derecha que es cada vez más grande y aumenta cada vez más rápido: hace falta que cambie en el tiempo, recuerda, o no conseguiremos un campo eléctrico como consecuencia. De acuerdo con la tercera ecuación de arriba, la ley de Faraday, alrededor del punto en cuestión aparecerá un campo eléctrico cuyo rotacional va en contra del campo magnético, de modo que el campo eléctrico será perpendicular a él y estará «girando» como un tornillo que se mueve hacia la izquierda, como ya indicamos al hablar de la ley de Faraday, de modo que permite que no me detenga mucho en esto:



Sí quiero hacer énfasis en algo que no era muy importante cuando hablamos sobre esto la primera vez, pero en este momento es fundamental: el hecho de que el rotacional del campo eléctrico va **en contra** de la variación del campo magnético, no en el mismo sentido. En términos de las ecuaciones, simplemente quiero que tengas bien presente ese pedazo de signo negativo en la ley de Faraday, que es el responsable de que las dos flechas de la ecuación de arriba vayan en sentidos contrarios. Porque, como veremos, los campos eléctrico y magnético no se comportan igual respecto a esto, y ese diferente comportamiento es una de las razones que posibilitan que estés leyendo estas líneas.

Además, puesto que hemos dicho que nuestro campo magnético no sólo está aumentando, sino que lo hace cada vez más rápido, el rotacional del campo eléctrico no sólo aparecerá «de la nada», sino que será cada vez más grande. En fin, el caso es que con nuestro ejemplo hasta ahora hemos simplemente repasado la ley de Faraday. Pero, como hizo Maxwell, tenemos que ir más allá y enlazar esta ley con la siguiente, la de Ampère-Maxwell.

Recuerda que antes no existía campo eléctrico alguno: ha aparecido a consecuencia del campo magnético variable que nos hemos inventado. Ahora, sin embargo, sí hay un campo magnético con un rotacional que es cada vez mayor. Si antes no había campo eléctrico y ahora sí es que *tenemos un campo eléctrico variable en el tiempo*. Pero ya vimos, al hablar de la ley de Ampère-Maxwell, que un campo eléctrico que cambia en el tiempo origina inevitablemente un campo magnético a su alrededor que es perpendicular a su variación en el tiempo:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

¡Pero aquí ya había un campo magnético! ¿Ahora tenemos dos? No, claro que no: tenemos un campo magnético total que es la suma del campo magnético adicional añadido al que ya existía. Lo esencial para comprender esto, el quid de la cuestión, es ver *qué relación guardan el campo magnético «original» y el campo magnético «secundario»*. Hay dos cosas importantísimas que hace falta entender aquí.

En primer lugar, con la ley de Faraday hemos obtenido un campo eléctrico perpendicular al campo magnético original; pero ahora, con la de Ampère-Maxwell, obtenemos un campo magnético perpendicular a ese campo eléctrico. Por lo tanto, ¡el campo magnético secundario debe ser de nuevo paralelo al campo magnético original! Dicho con otras palabras, en la ley de Faraday giramos $\mathbf{B}$ $90°$ para obtener la dirección de $\mathbf{E}$, pero ahora en la de Ampére-Maxwell, que también tiene un rotacional, giramos $\mathbf{E}$ $90°$ para obtener la dirección de $\mathbf{B}$, de modo que estamos como al principio.

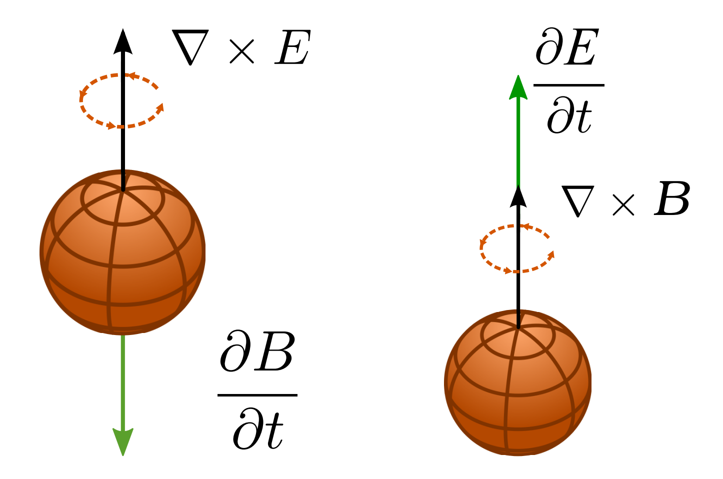
Esto es lo suficientemente importante como para que lo exprese de una tercera manera, por si a alguien le ayuda a verlo: el campo magnético secundario es perpendicular a la perpendicular al campo magnético original, luego debe ser paralelo a él. Es como si hubiéramos hecho el «rotacional del rotacional» y nos hubiéramos quedado como estábamos antes... o casi.

Porque aquí viene la segunda cosa importantísima de la que hablaba: antes dijimos que algo esencial en la ley de Faraday

es que había un signo menos a la derecha de la ecuación, es decir, que el rotacional del campo eléctrico no iba en el sentido de la variación del campo magnético, sino *en contra*. **Pero en la ley de Ampére-Maxwell no hay ningún signo menos**, y esa diferencia es de una importancia capital, tanta que voy a poner un signo más en la segunda aunque no haga falta:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{B} = +\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Aquí tienes las imágenes que mostramos en ambas leyes, en las que puedes ver la diferencia de comportamiento entre ambos campos:



De modo que antes hablé mal: dije que habíamos hecho «*el rotacional del rotacional*», pero en el primer caso no hicimos eso, sino «*menos el rotacional*», así que lo que hicimos realmente al combinar ambas ecuaciones, partiendo del campo magnético original para obtener el secundario, fue «*menos el rotacional del rotacional*». Por lo tanto, el campo magnético secundario vuelve a ser paralelo al campo original, pero **va en sentido contrario**.

Es decir, el campo magnético original aumentaba con el tiempo, y como consecuencia produjo un campo eléctrico que antes no existía; la aparición de ese campo eléctrico, a su vez, indujo la aparición de un nuevo campo magnético que se dirige justo en contra del campo magnético original. Por lo tanto, el campo magnético total ya no aumenta tan rápido como antes pues, por pequeño que sea este nuevo campo magnético secundario, compensará parte del campo principal, ya que va en sentido contrario a él.

Si hubiéramos hecho este «menos rotacional del rotacional» como Dios manda, hubiéramos obtenido la ecuación que resulta de combinar ambas para librarnos del campo eléctrico y fijarnos sólo en el magnético, que es algo así:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Ese operador nabla al cuadrado se llama *laplaciano*, en honor al francés Pierre-Simon de Laplace, y tiene que ver con este «rotacional del rotacional», pero aquí no voy a meterme en el berenjenal de explicar cálculo vectorial, así que dejé-

moslo así: me basta con que hayas comprendido la explicación cualitativa con palabras, si es que no te has dormido por el camino. No quería, sin embargo, dejar de poner la ecuación, para que veas que el razonamiento que hemos hecho nos permite obtener una ecuación nueva *en la que sólo aparece el campo magnético*, justo el objetivo de Maxwell.

Pero la cosa no acaba aquí.

Según el campo magnético original va perdiendo ímpetu, pasa algo curioso: el campo magnético aumenta cada vez más despacio, frenado poco a poco por el aumento constante del campo eléctrico. ¡Pero las ecuaciones de Maxwell no han dejado de estar ahí tras el primer tramo de nuestro razonamiento! *Ahora empezará a suceder justo lo contrario.*

El campo magnético neto empezará a disminuir, y cuando el campo magnético secundario supere al original, se invertirá el sentido del campo magnético total. El campo eléctrico ha ido aumentando cada vez más rápido y, como consecuencia de la ley de Ampére-Maxwell, también lo está haciendo el rotacional del campo magnético perpendicular a él; pero este campo magnético secundario producirá entonces un campo eléctrico perpendicular a él, pues el rotacional del campo eléctrico va en contra de la variación del campo magnético. Estamos haciendo «*el rotacional de menos el rotacional*», pero llegamos a la misma conclusión inevitable de antes: **el campo eléctrico inducido ahora será justo de sentido contrario al campo eléctrico anterior**.

Matemáticamente, el resultado es idéntico a la ecuación que obtuvimos antes para el campo magnético, una vez más con el laplaciano:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Dicho en términos energéticos, una vez el campo eléctrico empieza a crecer a costa de «robar» parte de la energía con la que crecía el otro, disminuyendo así su ritmo de crecimiento, es él el que induce la aparición de un campo magnético cada vez mayor y, como consecuencia, pierde energía a su vez para «alimentar» al otro, de modo que crece menos de lo que debería porque están creciendo ambos a la vez. Pero este campo magnético no va en el sentido del campo original, sino que va en contra de él (en nuestro ejemplo, hacia la izquierda). Naturalmente, a continuación pasará lo mismo: el campo magnético originará uno eléctrico que irá en contra del anterior, y éste uno magnético que irá en contra del anterior, y así constantemente.

*¿Qué le está sucediendo entonces a cada uno de los dos campos, sin fijarnos en el otro?* Nuestro campo magnético empezó yendo hacia la derecha y era cada vez más grande. Sin embargo, pronto empezó a perder ímpetu, luego fue decreciendo y finalmente se dio la vuelta para empezar a ser cada vez más grande hacia la izquierda. Pero, ¡ah!, este campo invertido enseguida empezó a perder ímpetu también, pues creaba un campo en sentido contrario, para luego decrecer y luego revertir al campo original. Lo que está sucediendo es que el campo magnético crece, para de crecer, decrece, se invierte, crece, para de crecer... **el campo magnético está oscilando**.

Naturalmente, lo mismo le está pasando al campo eléctrico: crece, deja de crecer, decrece, se invierte, etc. Sólo hay dos

diferencias entre ambos, y estoy convencido de que, si has soportado todo este rollo hasta aquí, las tienes muy claras: en primer lugar, *ambos campos oscilantes son perpendiculares entre sí*. En segundo lugar, *ambos campos crecen y decrecen a la vez*, ya que el aumento de uno produce el aumento del otro, pero ese segundo aumento «roba» parte de la energía que seguiría aumentando el primero, con lo que ambos van perdiendo ímpetu y finalmente dejan de crecer para disminuir de nuevo y, finalmente, invertirse.

Sin embargo, hay otro efecto más que no podemos olvidar: esto no se detiene en el punto en el que estamos mirando. El rotacional del campo eléctrico indica que aparece un campo *alrededor* del punto original, no sólo allí. Por lo tanto, el campo eléctrico que estamos induciendo no sólo aparecerá en este punto, sino en otros cercanos. Y ese campo eléctrico, al variar en el tiempo, producirá otro magnético alrededor de él, pero una vez más, no sólo en ese punto, sino en otros cercanos. De modo que esta especie de reacción en cadena que hemos creado con nuestro campo magnético original se va propagando por el espacio, no se queda allí donde la iniciamos.

De hecho, si piensas en términos energéticos, esto significa que la energía del campo magnético original se va desperdigando, pues parte de ella pasa al campo eléctrico de los puntos próximos al original, y parte de ésa, a su vez, a los puntos próximos al nuevo punto en forma de campo magnético... si no hiciéramos nada más, en el punto original la oscilación de los campos eléctrico y magnético se iría desvaneciendo poco a poco según los campos inducidos en puntos próximos se fueran llevando esa energía cual sanguijuelas electromagnéticas. La única manera de mantener la oscilación inicial es si quienquiera que estuviera creando el campo magnético si-

gue haciéndolo, proporcionándonos «energía extra» con la que mantener la oscilación.

Hagamos entonces, como hizo Maxwell, una reflexión sobre lo que está sucediendo aquí realmente. Tenemos algo que oscila en un vaivén constante, y la energía de esa oscilación se propaga a otros puntos cercanos, en los que aparece una oscilación similar, y así una y otra vez. Hay un transporte de energía oscilante a través del espacio.

Se trata de una onda.

Ojalá pudiera haber visto la cara de Maxwell cuando se dio cuenta. A él no le hizo falta pensar en la propagación de la energía oscilante de unos puntos a otros, desde luego, sino simplemente obtener cualquiera de las dos ecuaciones con el laplaciano que hemos visto antes. La razón es que esas ecuaciones, si has estudiado mecánica ondulatoria, gritan «*¡Onda, ondaaaaaa!*» como unas descosidas. Aquí tienes la ecuación de una onda cualquiera en el espacio en la que oscila lo que quiera que sea que está oscilando, que represento con la letra **A**:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Compárala con la que hemos obtenido, por ejemplo, para el campo eléctrico, e imagina que eres Maxwell:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Más claro, el agua, ¿no?

Desde luego, si hay algo oscilando en forma de onda, la primera pregunta inmediata es «*¿Qué demonios está oscilando aquí, si no hay materia por ninguna parte?*»; una respuesta posterior a Maxwell podría ser que lo que está oscilando es el propio campo electromagnético. En la época de Maxwell, sin embargo, se pensaba que lo que estaba oscilando realmente era el *éter luminífero*, una sustancia redundantemente etérea que llenaba todo el espacio y cuyas perturbaciones eran las oscilaciones del campo eléctrico y el magnético. Pero, en lo que a nosotros respecta, lo importante es la existencia de una onda de los campos eléctrico y magnético oscilantes que se alimentan mutuamente: **una onda electromagnética**.

Pero ésa no es la única pregunta, y estoy convencido de que Maxwell se hizo la segunda muy rápidamente y la contestó también bastante deprisa. Es muy fácil producir campos eléctricos y magnéticos variables: basta con cambiar la intensidad de corriente en un cable o agitar un imán. Si los campos magnéticos y eléctricos variables son tan comunes y fáciles de producir, *¿dónde están estas «ondas electromagnéticas» que deberían estar por todas partes?*

Afortunadamente para Maxwell, esta pregunta se respondió casi a sí misma cuando el escocés determinó una cosa más sobre la oscilación del campo electromagnético. Si te fijas en la ecuación de onda general que hemos puesto arriba en la

que oscila algo llamado **A**, la única diferencia con las ecuaciones de las ondas electromagnéticas es que en una aparece $1/v^2$ y en la otra $\mu_0\varepsilon_0$; y esa $v$ no es más que la velocidad de propagación de la onda.

De modo que el producto $\mu_0\varepsilon_0$ determina la velocidad de las ondas electromagnéticas, con lo que Maxwell podría calcular esa velocidad como $v = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Una vez más, afortunadamente para él, los valores de las dos constantes, eléctrica y magnética, habían sido obtenidos ya con una precisión razonable por varios científicos experimentales antes que él (dimos sus valores respectivos en los capítulos correspondientes), con lo que James sólo tuvo que calcular la raíz cuadrada de su producto.

Al hacerlo, Maxwell obtuvo el resultado: **unos 300 000 kilómetros por segundo**.

Curiosamente, no fue el primero en obtener ese número a partir de las constantes electromagnéticas. Antes que él lo habían hecho los alemanes Wilhelm Eduard Weber y Rudolph Kohlsrauch en 1855, que se habían dado cuenta –sin saber nada sobre ondas electromagnéticas ni nada parecido– de que $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ tenía unidades de longitud partido por distancia, es decir, unidades de velocidad, y habían calculado que ese valor era de $3,1 \times 10^8$ m/s. Sin embargo, ni Weber ni Kohlrausch le dieron mayor importancia a la coincidencia de este valor con la velocidad de la luz, que el francés Hippolyte Fizeau había determinado unos pocos años antes como $3,14 \times 10^8$ m/s (ligeramente incorrecto, pero recuerda la época de la que estamos hablando). Desde luego, Weber y Kohlsrauch ni se plantearon que la luz tuviera nada que ver con esas unidades de velocidad obtenidas a partir de constantes eléctricas.

Pero, para llegar allí, Maxwell había partido de algo muy distinto: de la ecuación de una onda. Las oscilaciones electromagnéticas producían una onda que viajaba por el espacio a 300 000 km/s, y la luz era una onda que viajaba por el espacio a 300 000 km/s. El escocés llegó a la conclusión de que eso no podía ser una coincidencia: efectivamente, las ondas electromagnéticas sí estaban por todas partes, y sí que las veíamos, ¡literalmente! En palabras del propio Maxwell, que he citado otras veces pero no puedo resistirme a hacerlo nuevamente aquí,

> Esta coincidencia de resultados parece mostrar que la luz y el magnetismo son efectos de la misma sustancia, y que la luz es una perturbación electromagnética que se propaga a través del campo de acuerdo con las leyes del electromagnetismo.

En 1864, con un título absolutamente clarificador, Maxwell publicó *Electromagnetic Theory of Light* (*Teoría electromagnética de la luz*). Allí, el escocés detallaba su derivación de las ecuaciones de onda electromagnética y el cálculo de su velocidad de propagación. Nada volvería a ser lo mismo desde entonces.

Naturalmente, hubo quien pensó que sí se trataba de una coincidencia y que Maxwell no sabía de lo que estaba hablando, pero al genio teórico de James Clerk se sumó el genio experimental del alemán Heinrich Rudolph Hertz, que en una serie de experimentos entre 1885 y 1889 demostró sin ningún género de dudas que la hipótesis electromagnética de la luz de Maxwell era cierta.

Finalmente, no quiero olvidar algo que mencionamos al em-

pezar nuestro ejemplo y que es importante: *¿quién estaba generando el campo magnético original del ejemplo?* Dicho de otro modo, una vez aparece un campo magnético o un campo eléctrico variable, aparece una onda electromagnética de manera inevitable pero, *¿quién produce ese campo original?*

Si recuerdas las cuatro ecuaciones de Maxwell, puedes contestar tú mismo a esa pregunta: las cargas eléctricas. Eso sí, no vale cualquier carga eléctrica, porque no queremos simplemente un campo eléctrico o uno magnético — hacen falta cargas eléctricas que hagan aumentar el campo magnético (o uno eléctrico, que lo mismo da) cada vez más deprisa. Podríamos lograr esto, por ejemplo, con una carga eléctrica que se acercase hacia el punto que estábamos estudiando cada vez más deprisa: con **una carga eléctrica acelerada**. Lo mismo daría, por supuesto, que el campo fuera disminuyendo cada vez más deprisa porque la carga se estuviera alejando cada vez más rápido, o que hubiera cualquier otro cambio en el campo eléctrico o magnético que fuera cada vez más o menos brusco.

Son las cargas eléctricas aceleradas, por lo tanto, quienes crean la perturbación original y de las que proviene la energía necesaria para ponerla en marcha, y son las cuatro ecuaciones de Maxwell las que determinan esa perturbación original a partir de las densidades de carga y corriente; y, una vez puesto en marcha el proceso, son las cuatro ecuaciones sin carga ni corrientes las que describen cómo se propaga la perturbación por el espacio a la velocidad de la luz — es decir, de las *ondas electromagnéticas* de James Clerk Maxwell.

Esto llevó a un auténtico problema en la física de finales del XIX, por supuesto: los electrones en los átomos son cargas

eléctricas aceleradas, ya que están girando constantemente alrededor del núcleo. Las ecuaciones de Maxwell, por lo tanto, predicen con una exactitud y minuciosidad tremendas las características de la onda electromagnética emitida por esos electrones constantemente. Esa onda electromagnética se iría llevando paulatinamente la energía del electrón, que iría cayendo más y más hacia el núcleo hasta pegarse un mamporrazo contra él... pero claro, eso no sucede o no existirían los átomos estables que existen. La respuesta a este dilema fue una revolución como pocas en la historia de la Física: la **cuántica**. En *El Tamiz* tienes una serie entera dedicada al asunto, y seguramente algún día publiquemos también un libro.

Sin embargo, había otro problema aún más evidente: como hemos dicho, Maxwell obtuvo una velocidad de propagación para las ondas electromagnéticas de unos 300 000 km/s. Ahora bien, *¿300 000 km/s respecto a qué?* Lo mismo pasa con la fuerza de Lorentz que estudiamos en el capítulo anterior, en la que aparece la velocidad de una partícula cargada que sufre un campo magnético... *¿velocidad respecto a qué?* Puedes imaginarte la respuesta según el escocés: respecto al éter. Al fin y al cabo, en su teoría electromagnética el éter era el medio que oscilaba, el éter era el medio que transmitía las fuerzas eléctricas y magnéticas... el éter era algo así como el océano en el que notábamos las olas y los movimientos de otros objetos inmersos en él.

Esto suponía un enorme problema experimental, y a él dedicaremos el último capítulo, ya que supuso, una vez más, una revolución como pocas, comparable sólo a la propia cuántica: la **relatividad**.

# 8. La inspiración de la relatividad

Rematamos el libro con un capítulo dedicado al relato de cómo los problemas teóricos y experimentales derivados del carácter absoluto de la velocidad en las ecuaciones de Maxwell inspiraron el desarrollo de la Teoría Especial de la Relatividad de Albert Einstein. El genio de Einstein nos permitió comprender algo realmente profundo acerca de las ecuaciones: el hecho de que, más allá de lo que hubiera sospechado el propio Maxwell, los campos eléctrico y magnético no son más que dos aspectos del mismo fenómeno y que no tiene sentido hablar de ellos por separado, ya que constituyen un único *campo electromagnético.*

En este capítulo, por cierto, vamos a centrarnos en los aspectos directamente relacionados con las cuatro ecuaciones de Maxwell y la ley de Lorentz, y no dar una visión completa de la historia de la relatividad especial; tampoco vamos a continuar con la propia teoría einsteniana. Para comprender la segunda parte de este capítulo es esencial haber entendido algunos conceptos de relatividad, como la contracción de la longitud, de modo que si no has leído el libro o la serie de *Relatividad sin fórmulas*, te recomiendo que lo hagas antes de

seguir aquí..

Lo que sí podemos hacer es ir más allá de lo que lo hicimos en el preludio a *Relatividad sin fórmulas*. Allí hablamos –como lo haremos brevemente ahora– del experimento de Michelson-Morley para detectar la velocidad de la Tierra respecto al éter, pero no de la otra cara de la moneda, la teórica: la inspiración de Einstein en las ecuaciones de Maxwell y su invarianza para desarrollar su teoría. No lo hicimos porque es imposible sin conocer las ecuaciones de Maxwell, pero ahora la cosa es diferente.

No voy a repetir en detalle los avisos del capítulo anterior, porque son los mismos: aunque he hecho lo posible por explicar esto con razonamientos lo más claros posibles, esto no es fácil de entender, es abstracto, confuso y endiabladamente complicado. Así que ya puedes engrasar las neuronas y la paciencia si quieres seguir; por otro lado, si sabes de esto, deja de leer, bébete un batido, pasea al perro o haz algo más útil con tu vida que leer mis simplificaciones abyectas.

¿Listo? Pues vamos con ello.

Como dijimos al terminar el capítulo anterior, la teoría electromagnética de Maxwell, aunque era de una belleza extraordinaria, presentaba un problema que se hizo evidente en las décadas posteriores a su publicación, y se volvió realmente acuciante en los últimos años del siglo. La raíz de este problema era el hecho de que en la mecánica primaba el *principio de relatividad* de Galileo. Según este principio, cualquier experimento realizado por dos observadores diferentes que se muevan el uno respecto al otro con velocidad constante proporciona exactamente los mismos resultados para ambos: es

imposible afirmar que uno está quieto y el otro se mueve. Este principio físico aún estaba presente a finales del XIX, puesto que todos los experimentos lo habían confirmado hasta entonces.

Pero las ecuaciones de Maxwell y Lorentz *no eran iguales* para todos los observadores: la velocidad de las ondas electromagnéticas se medía respecto al éter, y la velocidad de un cuerpo cargado que sufre la fuerza de Lorentz también. El principio de relatividad de Galileo quedaba, por lo tanto, invalidado en la práctica. El italiano sostenía que no era posible saber quién estaba parado y quién se movía, pero resolver el dilema era tan sencillo como tomar una linterna y medir la velocidad de la luz. Si tú mides 300 000 km/s y yo no, es que tú estás en reposo respecto al éter y yo no. Sí que existe un sistema de referencia privilegiado, un «espacio absoluto», y ese sistema está definido por el éter.

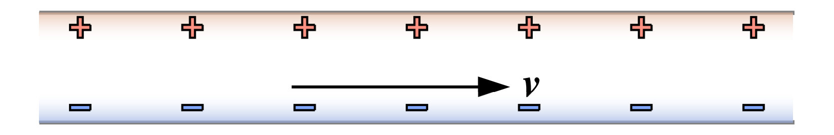
Hasta aquí, desde luego, no hay problema experimental por ninguna parte, y el propio Maxwell estaba satisfecho con medir las velocidades respecto al éter, ya que el escocés estaba convencido de su existencia. El problema experimental surgió cuando se intentó medir la velocidad de la Tierra respecto al éter y se comprobó repetidas veces que la Tierra estaba en reposo respecto al éter todo el tiempo, ¡incluso según cambiaba de velocidad en su movimiento alrededor del Sol! No voy a dedicar más tiempo a los experimentos correspondientes porque lo hicimos en *Relatividad sin fórmulas* y no tendría sentido repetirlos aquí.

En lo que quiero centrarme ahora, porque es lo que inspiró a Einstein a desarrollar su teoría, es en un aspecto diferente en el que la luz no desempeña ningún papel, pero que

también muestra el carácter absoluto del espacio de acuerdo con las ecuaciones de Maxwell; creo que a estas alturas estás preparado para afrontarlo, tras asimilar las leyes de Gauss (ambas), Faraday y Ampère-Maxwell.

Para comprender el problema inherente a las ecuaciones y las consecuencias extrañas que se derivan de ellas utilizaremos un ejemplo concreto –que no es mío, sino que es un clásico al explicar este tipo de cosas a gente que conoce las ecuaciones de Maxwell y Lorentz–. Mi objetivo con este ejemplo es, por un lado, mostrar cómo lo que observan dos personas diferentes que se mueven una respecto a la otra no es lo mismo en ambos casos, violando así el principio de relatividad de Galileo, y, por otro lado, cómo resolver el problema modificando nuestro punto de partida desde un espacio absoluto hacia una relatividad del espacio y el tiempo.

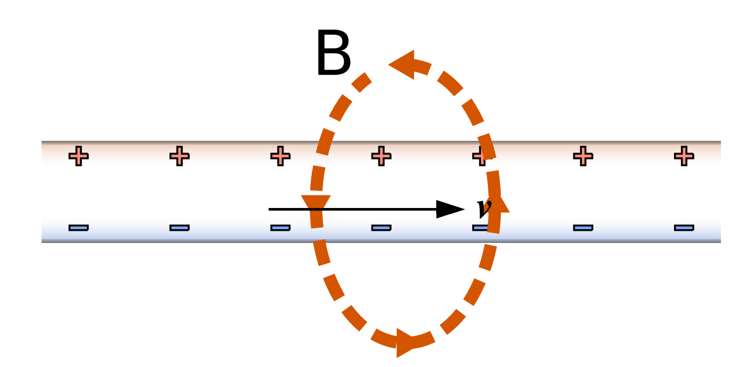
Imagina, como haría Maxwell, que tenemos un cable eléctrico rectilíneo e infinitamente largo, en reposo respecto al éter, por el que circula una corriente determinada. El cable tiene exactamente el mismo número de protones que de electrones, es decir, no tiene carga eléctrica neta. Los electrones del cable, eso sí, se mueven a una velocidad $v$ hacia la derecha respecto al éter. Tú, estimado y paciente lector, estás en reposo respecto al éter, y observando lo que sucede a su alrededor. Lo que verías sería algo así (protones en reposo y electrones en movimiento):



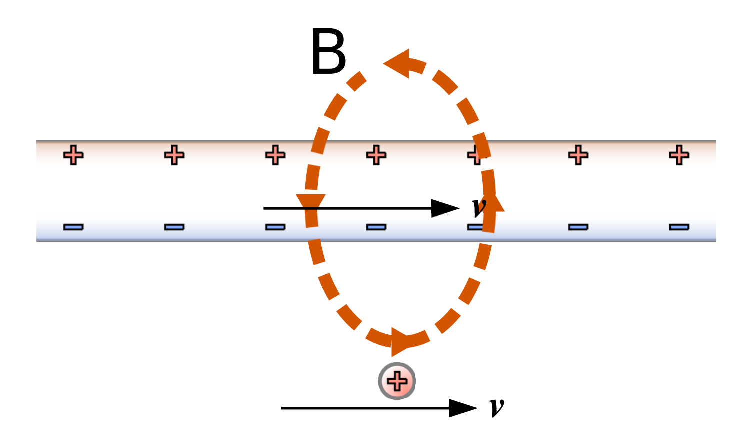
De acuerdo con la ley de Ampère-Maxwell –que tú, como observador, conoces bien– debido a esta corriente eléctrica el cable produce a su alrededor un campo magnético cuyo rotacional puedes calcular sin problemas, aunque aquí no lo hagamos. Debido a que no hay ningún campo eléctrico variable cerca, la ecuación de Ampère-Maxwell se queda sólo con la primera parte, sin la corrección de Maxwell:

$$\mathbf{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Como digo, podríamos calcular la densidad de corriente **J** a partir de las cargas del cable y su velocidad, y con ella el campo magnético alrededor del cable, etcétera. Pero lo importante no es eso, es el hecho de que alrededor del cable aparecerá un campo magnético como el que movía las limaduras de hierro en las experiencias de Faraday, y que «girará» alrededor del cable como si éste fuera un tornillo, de una manera parecida a ésta:



Imagina ahora que situamos un protón libre y díscolo cerca del cable que se mueve en paralelo al cable hacia la derecha a una velocidad $v$ respecto al cable:

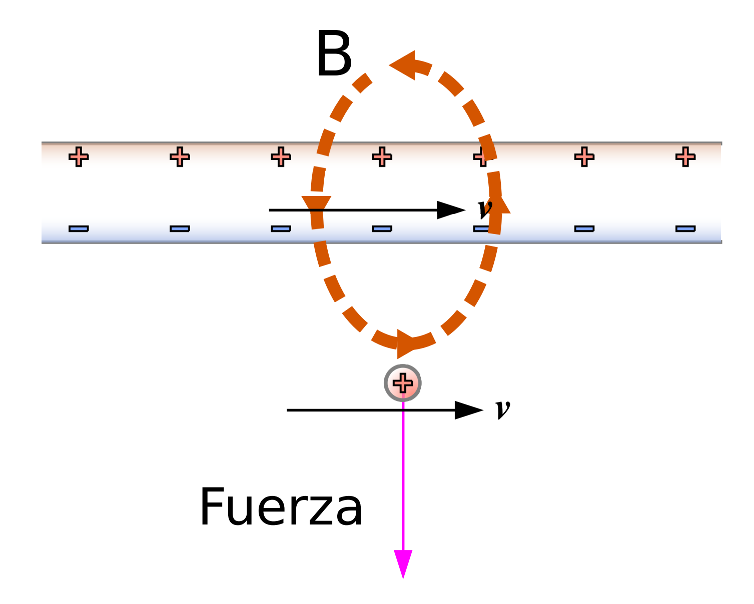



De acuerdo con la ley de Lorentz, ese protón sufrirá una fuerza magnética. Dado que, una vez más, aquí no hay ningún campo eléctrico, la fuerza de Lorentz sólo tiene el término correspondiente al campo magnético:

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Ya sé que esto parece un repaso inane a lo que ya sabes, pero paciencia. Podríamos calcular cuánto vale esa fuerza pero, una vez más, eso nos da igual; lo importante es que el protón sufre una fuerza magnética debida al campo magnético creado por el cable. Esa fuerza es, por cierto, perpendicular tanto a la velocidad del protón como al campo magnético y, aun-

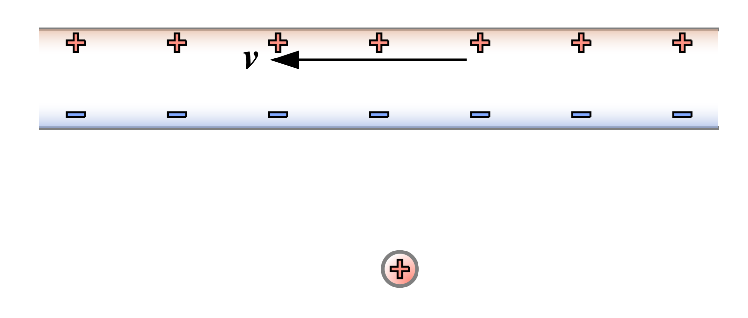
que no sea muy importante, en este caso está dirigida hacia abajo:




Aunque en este caso estemos hablando de un experimento mental, por cierto, esto realmente sucede: si pones una carga moviéndose paralelamente a un cable por el que circula corriente, la carga sale disparada en una dirección perpendicular al cable. Hasta aquí, todo normal. Tú, como observador en reposo respecto al cable, deberías ver el protón curvar su trayectoria hacia abajo separándose del cable debido al campo magnético.

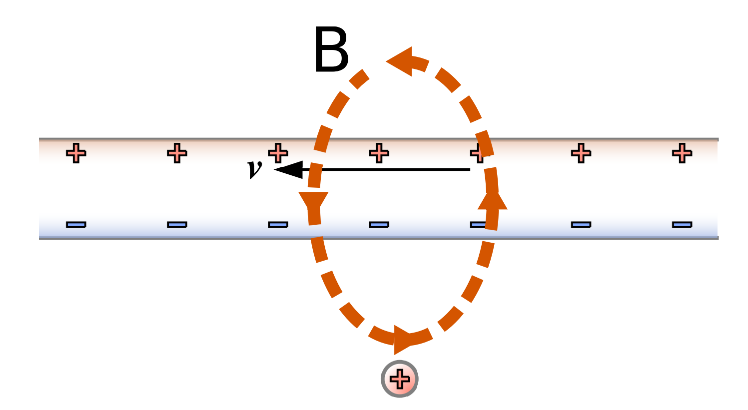
Veamos ahora qué observo yo, que no estoy en reposo respecto al cable sino que me muevo hacia la derecha a velocidad $v$, exactamente la misma que la de los electrones en el cable y la del protón fuera de él. Claro, como yo viajo respecto al

cable a la misma velocidad que los electrones y el protón, veo parados tanto a unos como al otro. Lo que yo veo moverse es a ti y al resto del cable –es decir, los protones– a la izquierda a la misma velocidad $v$:




Por lo tanto, yo también veo que el cable transporta una corriente eléctrica, en este caso debido no al movimiento de los electrones hacia la derecha sino de los protones hacia la izquierda. Curiosamente, la intensidad de corriente que veo es exactamente la misma que tú: la misma cantidad de carga –pues hay el mismo número de electrones que de protones–, la misma velocidad y, aunque aquí el movimiento es al contrario que antes, como la carga también es la opuesta –positiva en vez de negativa– la intensidad de corriente es exactamente igual que la que veías tú. Hasta aquí nos libramos de paradojas raras.

Es más, puesto que veo la misma intensidad de corriente, la ley de Ampère-Maxwell predice exactamente el mismo campo magnético que veías tú:




Pero ahora nos topamos con un problema de cuidado. De acuerdo con la ley de Lorentz, ¿qué fuerza sufrirá el protón?

**Absolutamente ninguna.**

Cuando hablamos de la ley de Lorentz hicimos énfasis en que el campo magnético se diferencia del eléctrico en que sólo actúa sobre cargas en movimiento. Al mirar la situación tú, la fuerza de Lorentz era $\mathbf{F} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, pero ahora la velocidad del protón es cero, luego el producto de esa velocidad por el resto de factores es cero, y el protón no sale disparado para ninguna parte y, desde luego, no se separa del cable.

¿Cómo es posible esto? ¿Cómo puedes tú ver que el protón se aleja del cable y yo no? La única respuesta clásica posible, desde luego, es que lo que sucede es lo que ves tú, y no yo, porque la velocidad en la ley de Lorentz es la velocidad respecto al éter, que es el sistema de referencia «de verdad» respecto al cual suceden los fenómenos electromagnéticos, luego no hay principio de relatividad galileana que valga. Tú estás parado de verdad, yo me muevo de verdad, y ambos vemos al

protón separarse del cable. Sin embargo, esta respuesta producía una inmensa insatisfacción en muchos, entre ellos en el propio Lorentz, en Henri Poincaré y en Albert Einstein.

Desde luego, sería una respuesta válida si se comprobase que, efectivamente, el éter existe y es un sistema de referencia absoluto. Sin embargo, todos los experimentos que trataron de demostrar ese hecho fracasaron estrepitosamente. *¿No podría, se preguntó Einstein, haber una explicación alternativa que no violase el principio de relatividad y que predijera que tanto tú como yo observamos lo mismo?*

Ése es el punto del que parte el alemán para establecer una base diferente: la suposición de que lo real es el principio de inercia –que siempre se había comprobado empíricamente– y no la existencia del éter y el movimiento absoluto –cuya existencia no había sido probada–. En 1905 Einstein publica su *Zur Elektrodynamik bewegter Körpe* (*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*), donde establece sus dos famosos postulados y asombra al mundo con su teoría especial de la relatividad. Pero, como ves por el nombre, el origen último de la inspiración de Einstein es el electromagnetismo.

En el prólogo, inmediatamente tras explicar un experimento teórico ligeramente distinto pero equivalente al nuestro, Einstein afirma:

> Otros ejemplos de esta índole así como los intentos infructuosos para constatar un movimiento de la Tierra con respecto al «medio de propagación de la luz» permiten suponer que no solamente en mecánica, sino también en electrodinámica, ninguna de las propiedades de los fenómenos corresponde

> al concepto de reposo absoluto. Más bien debemos suponer que, para todos los sistemas de coordenadas en los cuales son válidas las ecuaciones mecánicas, también tienen validez las mismas leyes electrodinámicas y ópticas, tal como ya se ha demostrado para las magnitudes de primer orden.
>
> Queremos llevar esta suposición (cuyo contenido será llamado de ahora en adelante «principio de la relatividad») al nivel de hipótesis y además introducir una hipótesis adicional que solamente a primera vista parece ser incompatible con el principio de la relatividad. Dicha hipótesis adicional sostiene que la luz en el espacio vacío siempre se propaga con cierta velocidad v que no depende del estado de movimiento del emisor.
>
> Basándonos en la teoría de Maxwell para cuerpos en reposo, estas dos hipótesis son suficientes para derivar una electrodinámica de cuerpos en movimiento que resulta ser sencilla y libre de contradicciones. La introducción de un «éter» resultará ser superflua, puesto que de acuerdo a los conceptos a desarrollar no es necesario introducir un «espacio en reposo absoluto», ni tampoco se asocia un vector de velocidad a ninguno de los puntos del espacio vacío en los que se llevan a cabo procesos electromagnéticos.

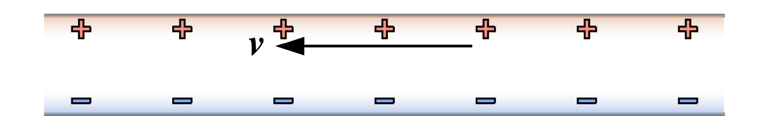
A partir de ahí, el alemán realiza los razonamientos que ya vimos en *Relatividad sin fórmulas* y obtiene cosas sorprendentes. Otros además de él habían ya intentado dar soluciones teóricas parciales al problema: Hendrik Lorentz, Geor-

ge Francis FitzGerald, Heaviside y sobre todo Henri Poincaré sugirieron hipótesis y teorías que resolvían varios de los problemas planteados por la incongruencia entre el carácter absoluto del electromagnetismo y el relativo de la mecánica. Pero ninguno llegó tan lejos como Einstein, ni de una forma tan limpia, ni desterrando ideas anteriores que no tenían verificación experimental, ni con tal cantidad de conclusiones verificables empíricamente.

De modo que razonemos como Einstein para explicar la aparente contradicción entre lo que vemos tú y yo, y para comprobar que el principio de relatividad no se rompe en este experimento mental.

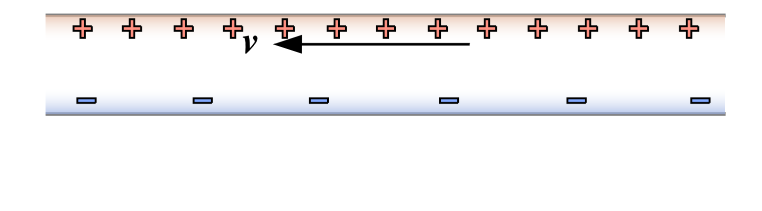
Quiero dar esta breve explicación no sólo por el puro placer de ver la relatividad en acción (por eso decía al principio que sin entender algo de relatividad esto no se puede seguir), sino porque la conclusión que se obtiene a partir de ella debería llevarte a mirar **E** y **B** de otra manera. Si lo hacemos bien tanto tú como yo, debería haber en un momento dado un «encendido de bombilla» de esos que se recuerdan. Veremos.

Retrocedamos al ejemplo del cable y a lo que yo, que me movía respecto a él a la misma velocidad que los electrones y el protón, veía:






Pensemos ahora en lo que yo veo *relativísticamente hablando*. Los protones del cable se mueven hacia la izquierda luego, de manera inevitable, debido a la contracción de la longitud, **van a estar más cerca unos de otros** de lo que estaban en reposo. Del mismo modo, los electrones que se movían están ahora en reposo respecto a mí, de manera que los veo **más lejos unos de otros**. De modo que, teniendo en cuenta la relatividad, lo que yo veo se representa más fielmente así:





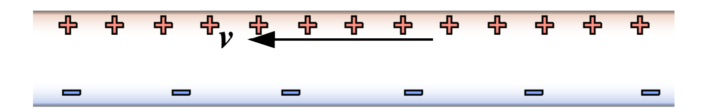

Los protones están más «apretados» y los electrones «separados» respecto a cómo lo veías tú, lo cual sería simplemente un efecto curioso pero no relevante, si no fuera por un «pequeño detalle», algo tan importante que lo voy a poner en su propia línea y en negrita:

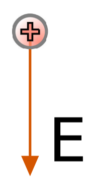
**El cable ya no es neutro.**

La distancia entre protones se ha acortado y la distancia entre electrones alargado, luego en la región cercana al protón y que nos interesa hay menos electrones que antes y más protones que antes. Como ves en el dibujo, ahora el cable tiene carga eléctrica neta *positiva*. De acuerdo con la ley de Gauss para el campo eléctrico, por lo tanto, la divergencia del campo eléctrico alrededor del cable será también positiva:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Por lo tanto, el campo eléctrico «sale» del cable y en la posición del protón irá hacia abajo:

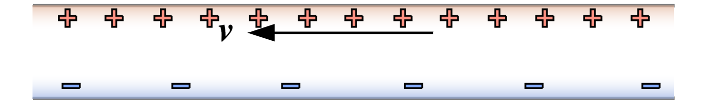


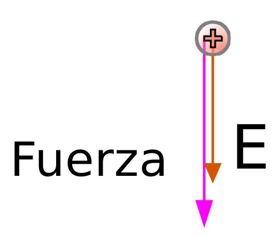




El protón sufre los efectos de ese campo de acuerdo con la ley de Lorentz. Ya vimos que el efecto del campo magnético que yo observo sobre el protón es nulo, puesto que el protón no se mueve, ¡pero ahora tenemos un campo eléctrico! La fuerza que sufre el protón será por tanto

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{E}$$

Esa fuerza irá en la dirección del campo eléctrico, es decir, alejándose del cable:




¡Ahora todo encaja! El protón, debido a la fuerza de Lorentz causada por el campo eléctrico, es repelido por el cable y se aleja de él, exactamente lo mismo que veías tú desde tu sistema de referencia, de modo que es una vez más imposible saber quién se mueve y quién está parado. La relatividad ha salvado el día y podemos dormir tranquilos... salvo por otro pequeño detalle.

Sí, el protón es repelido por el cable y ambos lo vemos, pero *¿por qué es repelido exactamente?* Tu explicación es clara: la corriente del cable crea, de acuerdo con la ley de Ampère-Maxwell, un campo magnético. El protón es una carga en movimiento en el seno de un campo magnético luego sufre una fuerza que lo separa del cable. Mi explicación es igualmente clara: la contracción de la longitud hace que el cable tenga carga neta positiva. Como consecuencia de la ley de Gauss, crea a su alrededor un campo eléctrico que apunta «hacia fuera» del cable, y ese campo eléctrico empuja al protón alejándolo del cable.

Entonces, ¿quién ha repelido al protón? ¿El campo magnético, como dices tú, o el campo eléctrico, como digo yo? *¿Quién tiene razón?*

Como dije tantísimas veces en *Relatividad sin fórmulas*, **los dos tenemos razón, y la pregunta no tiene sentido**. Pero las consecuencias de esto son bastante más profundas de lo que puede parecer en un principio.

Cuando yo observaba lo que sucedía moviéndome respecto al cable, apareció un campo eléctrico *que no existía en el sistema de referencia del propio cable* como consecuencia del movimiento relativo entre protones y electrones (pues si ambos se hubieran movido igual, no habría habido carga neta positiva, ya que ambos se habrían contraído del mismo modo). Dicho con otras palabras, *el campo eléctrico es un efecto relativista del campo magnético.*

Pero la cosa no acaba aquí. Recuerda que nadie tiene razón: es igualmente válido razonar al revés (o inventar un experimento mental diferente con un cable distinto) y ver cómo el campo magnético aparece como consecuencia de un desequilibrio de carga y movimiento relativo, de modo que ese campo magnético produzca el mismo efecto que producía el eléctrico original: *el campo magnético es un efecto relativista del campo eléctrico.*

No es que uno de los dos sea el «campo de verdad» y el otro una «consecuencia relativista», no. **Hay un solo campo electromagnético**, y dependiendo de cómo nos movamos respecto a los objetos lo notamos –y llamamos– como «campo eléctrico» o «campo magnético», y sus efectos son idénticos tanto en un caso como en otro cuando se aplica la relativi-

dad con cuidado. Damos los nombres a las dos caras de la moneda, pero la moneda es sólo una.

Una vez asimilado esto –y no es fácil–, la ecuación de onda de Maxwell no resulta tan sorprendente, ¿verdad? Los campos eléctrico y magnético están tan entrelazados entre sí que no resultan ser más que **aspectos de una misma realidad física**. *Ésa* es la auténtica revelación que supone mirar las ecuaciones de Maxwell a través de la lente relativista del Einstein. *Ésa* es la comprensión que no es posible alcanzar sin entender, al menos hasta cierto punto, tanto la relatividad del alemán como las ecuaciones del escocés.

# Conclusión

Espero que al terminar estas páginas, aunque haya requerido esfuerzo –pocas cosas de valor se aprenden sin él–, no sólo hayas ganado una cierta familiaridad con las cuatro ecuaciones del buen James e incluso disfrutado con su belleza, sino que además seas consciente de su enorme relevancia.

Las cuatro ecuaciones, junto con la ley de Lorentz, rigen casi todo lo que puedas imaginar: la luz con la que lees estas líneas, los impulsos eléctricos en el cerebro con el que las descifras, el ordenador con el que las escribo, las interacciones químicas que hacen que tu cuerpo sea como es... comprenderlas es, en una gran medida, comprender el Universo.

No quiero terminar sin expresar mi agradecimiento a Javier «J» Sedano y Macluskey por su apoyo, correcciones, sugerencias y compañía incondicionales, a Ángel Ruiz por su trabajo de maquetación en LaTeX, a Geli por sus estupendos diagramas y la paciencia de aguantarme y, por supuesto, a toda la comunidad de *El Tamiz*, sin la que este librito sería aún peor de lo que es.

Si has disfrutado con esta monografía y quieres leer otros artículos de divulgación científica del mismo estilo, puedes visitar la página web de *El Tamiz* en http://eltamiz.com y unir-

te a nosotros en el descubrimiento del mundo a través de la ciencia y la razón. Allí te esperamos.